Statistica computazionale
a cura di / By Carlo N. Lauro

ALCUNE CONSIDERAZIONI SULLE PROVE DI VITA PER TEMPI AL GUASTO ESPONENZIALI E CAMPIONAMENTI CENSURATI DI II TIPO

Franco Caroti Ghelli

Dipartimento di Matematica, Università di Pisa.

Quando si vogliono effettuare inferenze riguardanti la legge di distribuzione dei tempi di vita dei dispositivi di una data popolazione P, occorre estrarre un certo numero di questi dispositivi da P e sottoporli a prova di vita, eventualmente con metodo censurato.

Se si riuniscono in gruppi equinumerosi i dispositivi estratti, e i dispositivi di ciascun gruppo vengono connessi fra loro in serie, i sistemi che ne risultano possono essi stessi essere sottoposti a prova di vita.

In questo lavoro si mostra che le osservazioni che risultano da questo modo di procedere consentono inferenze, riguardanti i tempi di vita dei dispositivi di P, che mostrano identiche proprietà statistiche di quelle che utilizzano le osservazioni dei tempi di vita non dei sistemi serie suaccennati, bensì dei dispositivi originari estratti da P. Inoltre vien mostrato che, sotto opportune condizioni in verità non molto stringenti, i due modi di procedere richiedono tempi di osservazione poco diversi.

Ne deriva che l'osservazione dei tempi di vita dei sistemi serie, quando interessino inferenze riguardanti i tempi di vita dei dispositivi di P, si può in certi casi dimostrare vantaggiosa, perché richiede un minor numero di dispositivi di controllo e meno stringenti richieste su di essi.

Verranno inoltre suggeriti e discussi alcuni metodi per la scelta della numerosità dei gruppi.

1. INTRODUZIONE

L'interesse del modello esponenziale, per rappresentare la legge del tempo al guasto di dispositivi, è ben noto e ampiamente trattato da molti autori [Epstein B., 1958; Epstein B., 1960; Epstein B, Sobel M., 1953; Barlow R.E., Proschan F., 1975; Bain L.J., 1978]. È altresì noto che un metodo assai efficiente per la rilevazione di osservazioni di vita è quello conosciuto come "campionamento censurato a destra di II tipo" [Epstein B., 1960; Bain L.J.,1978], ampiamente utilizzato anche per inferenze Bayesiane [Bhattacharya S.K.,1967; Moore A.H.,Bilikam J.E.,1978; Tillman F.A.,Kuo W.,Hwang C.L.,Grosh D.L.,1982; Martz H.F.,Waller R.A.,1982].

Tuttavia, se con n si indica il numero dei dispositivi posti in prova, per l'osservazione dei loro tempi al guasto occorrono n dispositivi di controllo, ai quali si richiede ovviamente di avere tempi al guasto maggiori di quelli dei dispositivi in prova.

Questa condizione è tanto meno pesante quanto meno numerosi sono i dispositivi da controllare e più brevi sono mediamente i loro tempi al guasto. Da qui l'idea di riunire in s (< n) gruppi gli n dispositivi da sottoporre a prova, e di collegare fra loro in connessione serie i dispositivi di ciascun gruppo, ottenendo così s sistemi serie, con vita media sensibilmente più breve: il controllo dei tempi al guasto di questi ultimi, richiedendo un minor numero di dispositivi di controllo (s anziché n) con più deboli richieste di vita media, può risultare assai meno costoso [P.D.T. O'Connor, 1985].

In questo lavoro si indagherà, da un punto di vista statistico, su vantaggi e svantaggi che si incontrano utilizzando le osservazioni di vita degli s sistemi serie per arrivare a stime e tests per i parametri relativi ai tempi al guasto dei dispositivi originari. Verrà mostrato che, sotto condizioni piuttosto ampie e facendo riferimento al campionamento censurato a destra, questo modo di procedere fornisce risultati statisticamente equivalenti a quelli che si ottengono ponendo sotto controllo tutti gli n dispositivi originari. Si proporranno inoltre tre metodi alternativi per stabilire la numerosità dei gruppi; verrà poi effettuato un confronto fra questi metodi su basi sperimentali.

2. ASPETTI STATISTICI

Com'è noto, se si ha un campione di n dispositivi $\delta_1,\delta_2,.......,\delta_n$ estratto da una popolazione P, per ottenere informazione sulla vita media θ dei dispositivi di P sotto determinate condizioni di lavoro, un metodo molto usato è quello di sottoporre gli n dispositivi del campione alle condizioni di lavoro che interessano, e di misurare i primi r ($r \leq n$) tempi di guasto $Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_r$ (campionamento censurato di II tipo).

Posto:

$$Y \equiv Y_1 + Y_2 + \ldots\ldots + Y_r + (n-r) \cdot Y_r \qquad (1)$$

è ben noto che, nell'ipotesi che i tempi al guasto dei dispositivi δ_i seguano la legge esponenziale tutti con lo stesso parametro θ, la quantità:

$$W \equiv 2Y/\theta \qquad (2)$$

è una χ^2 con 2r gradi di libertà, e che la statistica:

$$\theta^* = \frac{Y}{r} = \frac{\theta \cdot W}{2r} \qquad (3)$$

è sufficiente per θ.

Supponiamo ora che gli n dispositivi del campione siano riuniti a caso in s gruppi di m ciascuno ($m < n$, $s \cdot m = n$), e che i dispositivi di ciascun gruppo vengano connessi fra loro mediante connessioni serie, dando così origine a s sistemi $\Delta_1, \Delta_2, \ldots\ldots, \Delta_s$, ciascuno dei quali funziona se e solo se tutti i dispositivi δ che lo compongono funzionano.

Se, per ogni i, con T_i si indica il tempo al guasto di Δ_i, poiché la funzione di rischio del sistema è la somma di quelle dei componenti, T_i risulta esponenziale di parametro $\xi \equiv \theta/m$; perciò l'osservazione dei T_i, fornendo informazione su ξ, fornisce informazione anche su θ.

Supponiamo che i sistemi Δ siano sottoposti a condizioni di lavoro tali che ciascuno dei dispositivi δ che lo compongono sia sottoposto al carico per il quale si vuol conoscere la sua vita media; supponiamo inoltre di arrestare l'esperimento al momento dell'r–esimo guasto ($r \leq s$) osservato fra i sistemi Δ. Siano $Z_1, Z_2, \ldots\ldots\ldots, Z_r$ i tempi di guasto dei sistemi Δ, ordinati in ordine crescente. Posto:

$$Z \equiv Z_1 + Z_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + Z_r + (s-r) \cdot Z_r \qquad (4)$$

la quantità:

$$V \equiv \frac{2Z}{\xi} = \frac{2Zm}{\theta} \qquad (5)$$

è una χ^2 con 2r gradi di libertà, esattamente come W; inoltre la statistica:

$$\xi^* \equiv Z/r \qquad (6)$$

è sufficiente per ξ e quindi anche per θ, e lo stesso vale per:

$$\theta^{**} \equiv m \cdot \xi^* = \frac{m \cdot Z}{r} = \frac{V \cdot \theta}{2r} \qquad (7)$$

A parità di r, poiché V e W hanno la stessa legge, la legge di θ^{**} è identica a quella di θ^*. Da questo deriva che l'informazione portata da θ^* è uguale a quella portata da θ^{**} e, per la sufficienza di θ^* e θ^{**}, i contenuti informativi dei due esperimenti risultano uguali.

Perciò l'osservazione dei primi r tempi al guasto degli s sistemi Δ_i consente inferenze statistiche del tutto equivalenti a quelle ottenibili dai primi r tempi al guasto degli $n=s \cdot m$ dispositivi δ_i.

Vogliamo perciò indagare sulla durata dei due procedimenti osservazionali, per verificare se in qualche caso il secondo procedimento possa essere preferibile al primo.

Si noti che per r=1 i due procedimenti misurano ambedue il primo fra gli n tempi al guasto dei dispositivi δ, quindi hanno esattamente la stessa durata. **Perciò in quanto segue ci limiteremo a studiare il caso r>1.**

3. CONFRONTO FRA LE DURATE DEI DUE PROCEDIMENTI

Per vedere se i due procedimenti siano fra loro in tutto equivalenti, rimane da verificare se la durata dell'esperimento osservazionale sia anch'essa uguale nei due casi.

Si noti allo scopo che l'osservazione dei tempi $Y_1, Y_2, ..., Y_r$ e quindi l'esecuzione delle inferenze che da essi si traggono, è un caso particolare dell'osservazione dei tempi $Z_1, Z_2, ..., Z_r$ e dell'esecuzione delle relative inferenze, corrispondente ad m=1. La durata dell'esperimento di osservazione dei tempi $Y_1, Y_2, ..., Y_r$ è ovviamente Y_r, mentre quella dell'osservazione dei tempi $Z_1, Z_2, ..., Z_r$ è Z_r. Si tratta quindi di confrontare fra loro Y_r e Z_r.

Innanzitutto si osserva che è $Y_r \leq Z_r$ con probabilità 1, perché il guasto di r dispositivi D implica quello di almeno r dispositivi δ; perciò il secondo procedimento non può essere più breve del primo.

Vogliamo allora vedere, per ogni scelta di n ed r, quanto grande possa essere scelto m senza che il valore di Z_r superi pesantemente quello di Y_r.

A questo scopo occorrerebbe poter individuare la legge congiunta di Y_r e Z_r, in modo da riuscire a ricavare per ogni k il valore della probabilità:

$$P(Z_r/Y_r \leq k)$$

Purtroppo però questa via sembra impercorribile, perché la legge congiunta di Y_r e Z_r, di per sé difficile da calcolarsi, si presenta troppo complicata per una soluzione analitica del problema.

Una via alternativa può essere quella di calcolare il valore di $P(Y_r \geq h)$ e $P(Z_r \geq k \cdot h)$

per h e k assegnati, per ricavarne sotto quali condizioni la seconda di queste due probabilità è non maggiore della prima. Questa alternativa sarà discussa in par. 4.

Una seconda alternativa consiste nel confronto fra $E(Y_r)$ ed $E(Z_r)$, e verrà discussa in par. 5.

Una terza alternativa si rifà al confronto fra la moda di Y_r e quella di Z_r, e verrà discussa in par. 6.

4. CONFRONTO FRA $P(Y_r \geq h)$ e $P(Z_r \geq k \cdot h)$

Com'è noto, se $T_1, T_2, ..., T_\nu$ sono n tempi al guasto esponenziali indipendenti e tutti di vita media ψ, se con X si indica l'r–esimo fra essi in ordine di grandezza, la densità di X per $x \geq 0$ risulta:

$$f_X(x) = \frac{\nu!}{(r-1)!(\nu-r)!} \cdot \left[1 - e^{-x/\psi}\right]^{r-1} \cdot \frac{1}{\psi} \cdot e^{-x(\nu-r+1)/\psi} \tag{8}$$

Posto allora:

$$W_n \equiv \exp(-X/y) \tag{9}$$

è facile verificare che la densità di W_ν è Beta di parametri $(\nu-r+1)$ ed r:

Posto allora s=n/m, risulta:

$$P(Y_r \geq h) = P(W_n \leq e^{-h/\theta}) \tag{10}$$

$$P(Z_r \geq k \cdot h) = P(W_s \leq e^{-khm/\theta}) \tag{11}$$

e il problema è ricondotto al calcolo della funzione di ripartizione della Beta.

Tuttavia dal punto di vista operativo il procedimento non è dei più rapidi, perché occorre:

i) Scegliere n,r ed h.

ii) Scegliere un valore per m ($\leq n/r$); se n ed m non sono compatibili, ossia se n non è un multiplo di m, modificare il valore di n.

iii) Calcolare, con l'aiuto di un calcolatore elettronico, la (10) e la (11).

iiii) Verificare se sia $P(Y_r \geq h) \geq P(Z_r \geq k \cdot h)$. Se no, ridurre m e ricominciare da ii).

La fase iii) può essere facilitata osservando che [L.J.Bain, M.Engelhardt, 1987] se V è una variabile binomiale di parametri ν e (1–w), allora è:

$$P(W_n \leq w) = P(V \leq r-1) \tag{12}$$

Poiché r di solito è scelto piccolo, il calcolo di $P(V \leq r-1)$ risulta abbastanza rapido, specialmente se si fa uso della ben nota relazione ricorsiva:

$$f_V(i) = [(\nu - i + 1) \cdot (1-w)/(i \cdot w)] \cdot f_V(i-1) \tag{13}$$

dove con $f_V(.)$ si è indicata la densità della variabile V.

Per il calcolo di $P(V \leq r-1)$ si può anche far ricorso alla approssimazione normale per la binomiale, a condizione che n sia abbastanza grande.

La procedura descritta in questo paragrafo potrebbe essere resa più rapida attraverso una tabulazione di $P(W_v \leq w)$, ma poiché tale probabilità è funzione di tre parametri $(w,\nu$ ed $r)$, questa tabulazione si presenta molto pesante.

Occorre anche notare che l'unico criterio razionale per la scelta di h sembra quello di vincolarlo ad essere uguale ad un quantile assegnato della legge di Y_r. Questo però comporta che h debba essere ricavato per tentativi tramite la (10) e la (11), e ciò rende il procedimento ancora più laborioso.

Un'alternativa può essere quella di scegliere h uguale a $\theta \cdot r/n$, che com'è noto (v. la (17)) per $r << n$ è all'incirca uguale alla media di Y_r.

5. CONFRONTO FRA $E(Y_r)$ ED $E(Z_r)$.

Come via alternativa alla precedente, si può pensare di considerare i due procedimenti come sostanzialmente equivalenti dal punto di vista della durata, se risulta:

$$E(Z_r) \leq k \cdot E(Y_r) \tag{14}$$

dove k è un opportuno reale >1.

È ben noto che, nelle ipotesi di tempi al guasto esponenziali di parametro θ, risulta:

$$E(Y_r) = \theta \cdot \sum_{i=1}^{r} (n-i+1)^{-1} \tag{15}$$

e analogamente:

$$E(Z_r) = \frac{\theta}{m} \cdot \sum_{i=1}^{r} (s-i+1)^{-1} \tag{16}$$

Dalla (15) si ottiene:

$$E(Y_r) \geq \theta \cdot r/n \tag{17}$$

e dalla (16):

$$E(Z_r) \leq \frac{\theta}{m} \cdot \frac{r}{s-r+1} \tag{18}$$

Perciò se è vera la disuguaglianza:

$$\frac{\theta}{m} \cdot \frac{r}{s-r+1} \leq \frac{r}{n} \cdot \theta \tag{19}$$

sicuramente sarà vera anche la (14). La (19) può esser posta nella forma:

$$m \leq n \cdot \frac{k-1}{r-1} \tag{20}$$

che consente di verificare immediatamente se il valore scelto per m soddisfi la (14).

Ad es., per la scelta n=100, r=5, k=1.5, la (20) è verificata se è $m \leq 12.5$.

Di solito interessa il massimo valore di m per il quale la (20) è verificata, che è dato dalla parte intera di $n \cdot (k-1)/(r-1)$. Tuttavia non è detto che questo valore sia effettivamente il più grande per il quale la (14) è verificata, perché la (20) è solo una condizione sufficiente per la (14), e la approssima ragionevolmente solo quando nelle (17) e (18) le disuguaglianze sono approssimate da uguaglianze, ossia per $r \ll n$ ed $r \ll s$.

Per ottenere effettivamente il massimo valore di m per il quale la (14) è verificata, occorrere in generale calcolare $E(Y_r)$ ed $E(Z_r)$ per mezzo di un calcolatore elettronico, oppure tabulare il rapporto $E(Z_r)/E(Y_r)$ in funzione di n,m ed r, e cercare per tentativi la soluzione.

Anche questa tabulazione, tuttavia, si presenta molto pesante.

6. CONFRONTO FRA LA MODA DI Y_r E QUELLA DI Z_r

Se i tempi al guasto dei dispositivi δ sono esponenziali di vita media θ, si ricava facilmente dalla (8) che il punto modale della densità di Z_r è:

$$z_m^* = \frac{\theta}{m} \cdot \ln \frac{s}{s-r+1} = -\frac{\theta}{m} \cdot \ln(1 - x \cdot m) \tag{21}$$

avendo posto:

$$x \equiv (r-1)/n \tag{22}$$

Il punto modale della densità di Y_r si ottiene ponendo m=1 nella (21), ed è:

$$z_1^* = -\theta \cdot \ln(1-x) \tag{23}$$

Essendo $r > 1$, risulta $0 < x < 1/m$, quindi z_m^* è definito e >0 per ogni m. Ne consegue che si può pensare di caratterizzare la durata dell'esperimento attraverso il suo valore più probabile, ossia attraverso z_m^* (z_1^* nel caso m=1).

Ci proponiamo ora di vedere quali condizioni si debbano imporre su m, dati r ed n, per poter affermare che il rapporto fra z_m^* e z_1^* non supera un assegnato valore k>1, ossia perché risulti:

$$z_m^* \leq k \cdot z_1^* \tag{24}$$

La (24) equivale a:

$$\ln(1-mx) \geq \ln[(1-x)^{km}]$$

e quindi a:

$$1-mx \geq (1-x)^{km} \tag{25}$$

Per m=1 (essendo k>1) la relazione è sicuramente verificata. Al crescere di m, il termine (1–mx) tende a $-\infty$, e cambia di segno per m=1/x; invece il termine $(1-x)^{km}$ è sempre >0 e tende a zero con derivata crescente. Ne deriva che i due termini debbono uguagliarsi per uno e un solo valore positivo di m, che risulta <1/x.

Questo punto, soluzione dell'equazione:

$$1-mx = (1-x)^{km} \qquad (m\geq 1) \tag{26}$$

può essere ottenuto con metodi numerici, una volta dati x e k, e rappresenta il massimo valore di m per il quale la (24) risulta verificata. Allo scopo alleghiamo la seguente tabella, dove è riportato il valore di x per il quale, dati k e m, la (26) è soddisfatta; da questo è facile ricavare il valore di m dato x.

Ad es., per k=1.5 , r=3 e n=20, si ha x=0.10, corrispondente nella tabella a un valore di m all'incirca uguale a 6: questo significa che per ogni $m\leq 6$ la (24) è verificata.

m=	2	3	4	5	6	8	10	15	20	30	40	50
k=1.2	.247	.138	.097	.073	.059	.043	.034	.022	.016	.011	.008	.006
k=1.5	.382	.231	.165	.129	.106	.078	.061	.040	.030	.020	.015	.012
k=2	.456	.291	.213	.168	.139	.103	.082	.054	.040	.027	.020	.016

7. RISULTATI SPERIMENTALI

In par. 2 si è mostrato come, raggruppando in connessioni serie i dispositivi sotto prova, si ottengono statisticamente gli stessi risultati che si ottengono con le prove di vita tradizionali, anche se con più lunghe durate degli esperimenti. Nei paragrafi successivi abbiamo inoltre mostrato che, sotto opportune condizioni, anche le durate degli esperimenti si equivalgono.

Da queste considerazioni deriva che l'osservazione dei tempi $Z_1,Z_2,\ldots\ldots,Z_r$ può rivelarsi vantaggiosa quando la connessione in serie dei dispositivi δ è facile e poco costosa (ad es., nel caso di lampade ad incandescenza, tubi a raggi catodici, connettori, ecc.), e contemporaneamente risulta desiderabile ridurre il numero dei dispositivi da controllare. Si noti infatti che il numero dei sistemi Δ è molto inferiore a quello dei dispositivi δ (s=n/m contro n); per questo motivo, quando gli strumenti delegati alla misura dei tempi di guasto hanno un costo non trascurabile, l'osservazione dei tempi di guasto dei sistemi Δ può tradursi in un sensibile risparmio. Inoltre la vita media dei sistemi Δ è molto minore di quella dei dispositivi δ, conseguentemente le richieste di vita media che si debbono fare sui dispositivi di controllo risultano molto meno stringenti.

Circa la preferenza da attribuire all'uno o all'altro dei tre metodi (descritti nei paragrafi 4,5 e 6), suggeriti per determinare il massimo valore di m per il quale, dati r ed n, le durate di esperimento si possono considerare equivalenti, c'è da dire che quello riportato in paragrafo 6 è senz'altro quello di utilizzazione più rapida e semplice.

Si è pensato perciò utile effettuare un'indagine per vedere se dagli altri due metodi ci sia da attendersi dei risultati sensibilmente diversi: in caso contrario infatti, parrebbe sensato prendere in considerazione soltanto il metodo descritto in par.6.

Allo scopo, si sono calcolati i rapporti $E(Z_r)/E(Y_r)$ e z_m^*/z_1^* per varie scelte di n,r ed m, per vedere quanto i due rapporti differiscano fra loro. Riportiamo in tab.1 alcuni dei risultati ottenuti, a titolo illustrativo; si osservi che il valore dei rapporti non dipende da θ, ma solo da n,r,m. Da questi risultati si evidenzia che i due rapporti sono sempre assai poco diversi fra loro (la differenza talvolta tende a crescere al crescere del rapporto, ma diviene sensibile solo per rapporti piuttosto elevati). Perciò la determinazione di m effettuata con il metodo proposto in par.6, se per k si sceglie un valore basso ($1.2 \div 1.4$) assicura che anche il rapporto fra le medie soddisfa la condizione (14).

Quando tuttavia si desideri una rapida verifica sulla adottabilità di un dato valore di m, si può anche far riferimento alla (20), tenendo però presente che si tratta di una condizione sufficiente per la (14) ma non anche necessaria.

Tab 1. Rapporti fra le medie e le mode di Z_r e Y_r, per alcune scelte di n,r,m.

	n = 105 m = 15 r = 3	n = 100 m = 4 r = 10	n = 60 m = 20 r = 3	n = 52 m = 4 r = 10	n = 112 m = 28 r = 2	n = 120 m = 4 r = 10
$E(Z_r)/E(Y_r)$	1.177	1.187	1.802	1.593	1.161	1.146
z_m^*/z_i^*	1.166	1.183	1.621	1.550	1.146	1.144

Per quanto riguarda il metodo descritto in par.4, le prove fatte (v.tab.2) hanno evidenziato che la scelta di h influenza in modo sensibile i risultati. Tuttavia, se h viene scelto prossimo alla media di Y_r, il valore di m che ne risulta (a parità di k,n,r) coincide generalmente con quello che si ottiene con gli altri due metodi o ne differisce assai poco. Perciò, se interessa una scelta di h prossima alla media di Y_r, è da preferire il metodo descritto in par.6, assai più pratico. Tuttavia può ancora essere opportuno ricorrere ad esso, quando si voglia far coincidere h con un quantile elevato.

Tab II. Valori di $P(Y_r>h)/P(Z_r>kh)$ per varie scelte di n,r,m,k,h.

	n = 105 m = 15 r = 3	n = 100 m = 4 r = 10		n = 52 m = 4 r = 10		n = 60 m = 20 r = 3
k = 1.2 h = r/n	1.034	1.029	k = 1.6 h = r/n	1.035	k = 1.8 h = r/n	1.038
k = 1.2 h = (r/n)(3/2)	1.053	1.050	k = 1.6 h = (r/n)(3/2)	0.93	k = 1.8 h = (r/n)(3/2)	0.97
k = 1.2 h = (r/n)(9/4)	1.064	1.018	k = 1.6 h = (r/n)(9.4)	0.55	k = 1.8 h = (r/n)(9/4)	0.76

Qualora il modello esponenziale non sia adeguato a rappresentare la legge dei tempi di vita dei dispositivi δ, i procedimenti proposti ovviamente non sono più applicabili perché vengono a cadere le ipotesi su cui si fondano.

Tuttavia ci si è chiesti se un allontanamento non troppo forte dal modello esponenziale influenzi sensibilmente la validità dei risultati. Perciò si è pensato di applicare il metodo a tempi di vita con legge un po' diversa dall'esponenziale; come modello di confronto si è scelta la legge $\Gamma(2,\lambda)$, anche per la sua facile programmabilità.

Allo scopo si sono compiute alcune simulazioni, generando n–ple di variabili aleatorie con legge $\Gamma(2,\lambda)$ per varie scelte di λ, e utilizzando queste n–ple come fossero i tempi di vita dei dispositivi δ. A partire da queste n–ple, si sono ottenuti i corrispondenti tempi di vita dei dispositivi Δ e di conseguenza le stime per le durate medie dei due esperimenti.

Si sono inoltre utilizzati questi tempi di vita simulati per ottenere la stima della vita media dei dispositivi δ mediante lo stimatore valido per il caso di tempi di vita esponenziali e campionamenti censurati di II tipo. Quest'ultima indagine ha lo scopo di verificare l'utilizzabilità delle inferenze valide per il caso esponenziale.

I risultati, alcuni dei quali sono riportati nelle tab. 3, 4 e 5, mostrano che in generale il rapporto $E(Z_r)/E(Y_r)$ è più vicino ad 1 (a parità di n,m,r) di quanto non lo sia per il caso di tempi esponenziali: questo ci assicura che, se per una terna (n,m,r) il rapporto per il caso di tempi esponenziali è minore di k, a maggior ragione lo sarà per tempi di vita di tipo $\Gamma(\alpha,\lambda)$ con $\alpha>1$. Perciò un valore di m per il quale la (16) è

≤ di k volte la (15), soddisferà anche la (14) per tempi di vita $\Gamma(\alpha,\lambda)$.

Si tenga tuttavia presente che, anche se un moderato allontanamento dall'ipotesi esponenziale consente di usare i metodi descritti per il calcolo di m, tuttavia questo non autorizza a ritenere che anche in questo caso i due esperimenti abbiano lo stesso contenuto informativo, né tantomeno che sia lecito usare le tecniche inferenziali valide per il caso di tempi di vita esponenziali. Ad illustrazione di questo, si osservino nelle tabelle 3,4,5 i valori stimati (mediante lo stimatore valido per tempi esponenziali) per la vita media: come si vede, e come c'era da aspettarsi per la scarsa robustezza delle inferenze per la legge esponenziale, essi sono in forte disaccordo con i rispettivi valori veri.

Tab. III: Valori stimati di $E(Z_r)/E(Y_r)$ per tempi di vita $\Gamma(2,1)$, confrontati con i valori veri. Valori di vita media stimati mediante gli stimatori $(Y_1+Y_2+......+Y_r+(n-r)Y_r)/r$ e $(Z_1+Z_2+......+Z_r+(s-r)Z_r)/r$, confrontati con i rispettivi valori veri.

	n = 105 m = 15 r = 3	n = 100 m = 4 r = 10	n = 60 m = 20 r = 3	n = 52 m = 4 r = 10
$E(Z_r)/E(Y_r)$	1.177	1.187	1.802	1.593
$E(Z_r)/E(Y_r)$ stimato	1.129	1.124	1.481	1.289
Vita media dispos. δ (=2/λ)	2	2	2	2
Vita media dispos. Δ (=2/mλ)	0.1333	0.5	0.1	0.5
Vita media stimata dispos. δ	8.13	5.17	6.99	3.83
Vita media stimata dispos. Δ	0.546	1.275	0.348	0.90

Tab. IV: Valori stimati di $E(Z_r)/E(Y_r)$ per tempi di vita $\Gamma(2,5)$, confrontati con i valori veri. Valori di vita media stimati mediante gli stimatori $(Y_1+Y_2+......+Y_r+(n-r)Y_r)/r$ e $(Z_1+Z_2+......+Z_r+(s-r)Z_r)/r$, confrontati con i rispettivi valori veri.

	n = 105 m = 15 r = 3	n = 100 m = 4 r = 10	n = 60 m = 20 r = 3	n = 52 m = 4 r = 10
$E(Z_r)/E(Y_r)$	1.177	1.187	1.802	1.593
$E(Z_r)/E(Y_r)$ stimato	1.104	1.121	1.374	1.253
Vita media dispos. δ (=2/λ)	.4	.4	.4	.4
Vita media dispos. Δ (=2/mλ)	0.0266	0.1	0.02	0.1
Vita media stimata dispos. δ	1.75	0.947	1.35	0.81
Vita media stimata dispos. Δ	0.114	0.235	0.063	0.187

Tab. V: Valori stimati di $E(Z_r)/E(Y_r)$ per tempi di vita $\Gamma(2,20)$, confrontati con i valori veri. Valori di vita media stimati mediante gli stimatori $(Y_1+Y_2+......+Y_r+(n-r)Y_r)/r$ e $(Z_1+Z_2+......+Z_r+(s-r)Z_r)/r$, confrontati con i rispettivi valori veri.

	n = 105 m = 15 r = 3	n = 100 m = 4 r = 10	n = 60 m = 20 r = 3	n = 52 m = 4 r = 10
$E(Z_r)/E(Y_r)$	1.177	1.187	1.802	1.593
$E(Z_r)/E(Y_r)$ stimato	1.149	1.124	1.512	1.321
Vita media dispos. δ (=2/λ)	0.1	0.1	0.1	0.1
Vita media dispos. Δ (=2/mλ)	0.0066	0.025	0.005	0.025
Vita media stimata dispos. δ	0.418	0.233	0.320	0.196
Vita media stimata dispos. Δ	0.028	0.0055	0.0156	0.046

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

Epstein B.: *The Exponential Distribution and Its Role in Life Testing,* Industrial Quality Control, **15**, 5–9; 1958.

Epstein B.: *Statistical Life Test Acceptance Procedures,* Technometrics, **2**, 435–446; 1960.

Epstein B., Sobel M.: *Life Testing,* J. Amer. Statist. Assoc., **48**, 486–502; 1953.

Bhattacharya S.K.: *Bayesian Approach to Life Testing and Reliability Estimation,* J. Amer. Statist. Assoc., **62**, 48–62; 1967.

Moore A.H., Bilikam J.E.: *Bayesian Estimation of Parameters of Life Distributions and Reliability from Type II Censored Samples,* IEEE Trans. on Reliability, **R–27**, 64–67; 1978.

Tillman F.A., Kuo W., Hwang C.L., Grosh D.L.: *Bayesian Reliability and Availability – a review,* IEEE Trans. on Reliability, **R–31**, 362–372; 1982.

Barlow R.E., Proschan F.: *Statistical Theory of Reliability and Life Testing,* Holt, Rinehart & Winston, New York, 1975.

Bain L.J.: *Statistical Analysis of Reliability and Life–Testing Models,* Marcel Dekker, New York, 1978.

Martz H.F., Waller R.A.: *Bayesian Reliability Analysis,* J. Wiley & Sons, New York, 1982.

O'Connor P.D.T.: *Practical Reliability Engineering,* J. Wiley & Sons, New York, 1985.

SUMMARY

In making inferences on the lifetime distribution of the devices in a given population P, it is necessary to extract from P a given number of devices and to submit they to a life test, eventually with a censored method.

If we share the extracted devices in equal groups, and we join together all the devices of every group with series connections, we can observe the lifetimes for the resulting systems, and use the obtained observations for inferences regarding the devices of P. In fact in this work it is shown that these inferences have statistical properties which are identical to those which utilize the life observations for the original devices.

Furthermore it is shown that, under suitable not very strong conditions, these two procedures require nearly equal observation times.

Therefore the observation of the lifetimes for the series systems can be preferable, because it uses fewer control devices with weaker requests.

Some methods for selecting the group dimensions will be shown and discussed.