

PROCESSI STOCASTICI SPAZIALI: MODELLI, STIMA E SIMULAZIONE*

Giorgio Celant

Dipartimento di Scienze Statistiche, Università degli Studi di Padova

E-mail: celant@stat.unipd.it

Riassunto

In questo lavoro cercheremo di evidenziare le differenze tra i processi spaziali e le serie storiche. Quindi esamineremo la stima, i test e la simulazione per alcuni importanti processi spaziali.

1 ANALISI SPETTRALE E MODELLI

1.1 ANALISI SPETTRALE

In questo paragrafo trattiamo a grandi linee l'analisi spettrale dei processi aleatori spaziali.

Un processo stocastico spaziale è un processo stocastico X_t , tale che $t \in \mathbb{Z}$, $n > 1$.

Se per ogni sottoinsieme finito $T = \{t_1, \dots, t_n\}$ di \mathbb{Z}^n il vettore $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ è gaussiano allora il processo è detto gaussiano. Il processo X_t è debolmente stazionario se:

(a) $E(X_t) = \mu, \forall t \in \mathbb{Z}^n$,

(b) $\text{cov}(X_t, X_{t+h}) = \gamma(h)$ è funzione della sola h .

La (b) nel caso gaussiano equivale a dire che: $\text{cov}(X_t, X_s) = \gamma(t - s)$.

Per ragioni di semplicità, considereremo solo processi di media nulla. Interpretando il processo X_t come un insieme di punti appartenenti al più piccolo spazio di Hilbert, $H(X)$, contenente X_t , possiamo scrivere il processo come segue (teorema di Stone):

$$X_t = \int_{[-\pi, \pi]^n} e^{i\langle \lambda, t \rangle} Z(d\lambda), \quad (1)$$

*Il presente lavoro è stato finanziato dal Progetto COFIN99 "Metodi di Inferenza Statistica per Problemi Complessi", responsabile prof. Fortunato Pesarin.

con $\langle \lambda, t \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i t_i$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ e $t = (t_1, \dots, t_n)$. La misura $Z(d\lambda)$ è a sua volta un processo stocastico di media nulla tale che:

- (a) $E(Z(B)) = 0$
- (b) $E(Z(B)Z^*(B')) = 0$, $B \cap B' = \emptyset$,

con B e B' boreliani del toro (cioè dell'insieme $[-\pi, \pi]^n$) e dove "*" indica il complesso coniugato.

La (1) associa ad X_t una funzione detta funzione spettrale o spettro così definita:

$$E(|Z(d\lambda)|^2) = F(d\lambda). \quad (2)$$

La derivata (quando esiste) nel senso di Radon Nikodym rispetto alla misura di Lebesgue λ si chiama densità spettrale del processo e si indica con $f(\lambda)$.

La funzione spettrale ha la seguente notevole proprietà:

$$\gamma(h) = \int_{[-\pi, \pi]^n} e^{i\langle \lambda, h \rangle} dF(\lambda), \quad h = (h_1, \dots, h_n). \quad (3)$$

La (3) ci dice che l'autocovarianza del processo è la trasformata di Fourier-Stieltjes della funzione spettrale. Oltre ad introdurre le grandezze spettrali del processo, la (1) permette di ricondurre lo studio del processo o più generalmente del suo spazio di Hilbert, $H(X)$, allo studio di uno spazio più semplice che è lo spazio $L^2_{\mathbb{Z}^n}(dF(\lambda))$ (quest'ultimo è lo spazio di Hilbert generato dall'insieme $\{e^{i\langle \lambda, t \rangle}\}$, $(\lambda, t) \in [-\pi, \pi]^n \times \mathbb{Z}^n$). Infatti dalla (1) possiamo subito derivare il seguente isomorfismo isometrico tra $H(X)$ e $L^2_{\mathbb{Z}^n}(dF(\lambda))$:

$$g(X_t) \leftrightarrow \int_{[-\pi, \pi]^n} g(\lambda) Z(d\lambda), \quad (4)$$

isomorfismo che associa X_t a $e^{i\langle \lambda, t \rangle}$.

Dallo studio delle serie storiche è ben noto che "la natura" del processo è basilare per stabilire sia le proprietà probabilistiche che statistiche.

Con "natura" del processo intendiamo dire se il processo è regolare, singolare o misto.

Queste nozioni sono legate ai concetti di passato e futuro del processo ossia ad un ordinamento.

Ora in \mathbb{Z} l'ordinamento è di tipo algebrico ossia è indotto dalla sua struttura algebrica. Invece in \mathbb{Z}^n non è possibile definire in modo "naturale" un ordinamento. Infatti per $n > 1$ non possiamo usare le proprietà algebriche per definire un ordinamento (si pensi al corpo dei numeri complessi

C). Ciò ovviamente non significa che non sia possibile definire un ordinamento in \mathbb{Z}^n , $n > 1$. Anzi, possiamo definire una infinità di ordinamenti lineari in \mathbb{Z}^n .

Tra i vari ordini lineari hanno fondamentale importanza quello lessicografico e quello di Tjöstheim. Diamo la definizione di ordine lessicografico che indicheremo con \leq .

Siano s, t due punti generici di \mathbb{Z}^n , allora: $(s_1, \dots, s_n) \leq (t_1, \dots, t_n)$ se e solo se, $s_1 < t_1$ oppure nel caso che $s_1 = t_1$ si abbia $(s_2, \dots, s_n) \leq (t_2, \dots, t_n)$.

L'ordine lessicografico è molto importante in quanto estende una buona parte delle proprietà di \mathbb{Z} a \mathbb{Z}^n .

Indicando con $H_t(X)$ il più piccolo spazio di Hilbert generato dall'insieme $\{X_s, s \leq t\}$ ($H_t(X)$ è il passato del processo fino a t) abbiamo le seguenti definizioni.

Il processo è regolare (si dovrebbe dire lessicograficamente e linearmente regolare) se e solo se:

$$H_\infty(X) = \bigcap_{t \in \mathbb{Z}^n} H_t(X) = \{0\}.$$

Il processo è singolare se e solo se:

$$H_t(X) = H(X), \quad \forall t.$$

La sostanza della regolarità e della singolarità è che la prima assicura che il processo non è esattamente prevedibile allorché la seconda permette una previsione (con Prob = 1) scevra di errori (cioè la varianza del previsore è nulla).

A conferma di quanto detto sull'ordinamento lessicografico abbiamo che dal punto di vista spettrale la condizione di regolarità è formalmente uguale a quella di Kolmogorov che ritroviamo nelle serie storiche.

Un processo è regolare se e solo se:

(a) $F(\lambda)$ è assolutamente continua;

(b) $\int_{[-\pi, \pi]^n} \log f(\lambda) d\lambda > -\infty$.

Se il processo è regolare possiamo associargli una decomposizione di Wold del tutto simile a quella studiata per le serie storiche. Per fare un esempio prendiamo $n = 2$, allora la decomposizione di Wold del processo è la seguente:

$$X_t = \sum_{s \geq 0} c_s \varepsilon_{t-s}, \quad \text{dove } c(0, 0) = 1. \tag{5}$$

La (5) è l'analogo delle medie mobili in \mathbb{Z} .

In sostanza possiamo descrivere il processo tramite rappresentazioni lineari che sono di fondamentale importanza per lo studio delle proprietà statistiche del processo.

Per analizzare le varie rappresentazioni lineari di un processo spaziale procederemo come segue: estendiamo la (5) al caso $n > 2$ e quindi interpretiamo la formula che otteniamo (che è detta media mobile) come una equazione in $H(X)$ nella incognita ε . La soluzione di questa equazione nell'incognita ε ci porterà a definire la scrittura autoregressiva del processo.

1.2 MODELLI

Sia $S \subseteq \mathbb{Z}^n$ (\subseteq indica un sottoinsieme finito) tale che, $0 \in S$. Se (ε_t) , $t \in \mathbb{Z}^n$ è un insieme di variabili aleatorie ortogonali con varianza σ^2 , definiamo come media mobile la seguente trasformazione lineare di (ε_t) :

$$X_t = \sum_{s \in S} a_s \varepsilon_{t+s}. \quad (6)$$

La (6) definisce un processo stocastico debolmente stazionario caratterizzato dai seguenti momenti:

$$(a) \text{Var}(X_t) = \sigma^2 \sum_{s \in S} a_s^2;$$

$$(b) \gamma(u) = \sigma^2 \sum_{s \in S} a_s a_{s+u}.$$

Il processo (6) è regolare ed ha la seguente densità spettrale:

$$f(\lambda) = \left| \sum_{s \in S} a_s e^{i\langle \lambda, s \rangle} \right|^2 f_\varepsilon(\lambda)$$

dove $f_\varepsilon(\lambda)$ è la densità di ε .

Se la (6) viene vista come una equazione nella incognita (ε_t) , possiamo risolverla in $H(X)$ invertendo il polinomio $L(U)$ (polinomio nella variabile U , operatore unitario che trasla t in $t - 1$). L'inversione della $L(U)$ in $L_{\mathbb{Z}^n}^2(dF)$ si ottiene invertendo la funzione complessa $L(z)$. Otteniamo:

$$X_t = \sum_{s \in S} a_s X_{t+s} + \varepsilon_t. \quad (7)$$

Nella (7) S è un sottoinsieme finito di \mathbb{Z}^n che non contiene l'origine e (ε_t) è una famiglia di variabili aleatorie ortogonali. La condizione di invertibilità della $L(z)$ è che quest'ultima non si annulli nell'insieme $[-\pi, \pi]^n$. La $L^{-1}(z)$ è lo sviluppo di Laurent di $L(z)$.

Come per le medie mobili anche i processi autoregressivi sono debolmente stazionari e regolari, la densità spettrale essendo data dalla formula:

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{|\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} d_k e^{i\langle \lambda, k \rangle}|^2}. \tag{8}$$

Il calcolo della autocovarianza dei processi autoregressivi è reso difficile dal fatto che ε_{t+s} e X_t sono tra loro correlati. Non possiamo quindi ottenere per questi processi spaziali delle formule analoghe a quelle di Yule-Walker.

Si ovvia a questo inconveniente introducendo una nuova classe di processi, i processi ARU (autoregressivi unilaterali).

Per $n = 2$ un processo ARU è del tipo:

$$X_t = \sum_{s \in S} d_s X_{t-s} + \varepsilon_t;$$

$$\varepsilon_t \perp X_u \text{ per } u \leq t.$$

Per questi processi si possono calcolare le autocovarianze in modo ricorsivo usando le equazioni di Yule-Walker.

Queste equazioni sono difficili da risolvere nel caso spaziale, cosicché in genere lo studio dei processi spaziali è basato in larga parte sulle sue proprietà spettrali.

Si possono introdurre rappresentazioni lineari di tipo ARMA, ma trascuriamole per definire la generalizzazione a \mathbb{Z}^n dei processi markoviani.

La teoria dei processi markoviani in \mathbb{Z}^n è essenzialmente dovuta a Rozanov e a Chay. Questi autori l'hanno introdotta per evitare l'uso in \mathbb{Z}^n di un qualche ordinamento. La teoria che ne consegue è quindi la più "naturale" possibile.

Ad esempio per definire la regolarità-singularità del processo si procede nel seguente modo. Si fissa un sottoinsieme finito T qualsiasi di \mathbb{Z}^n (per ragioni grafiche, prendiamo un cerchio di \mathbb{Z}^2).

L'esterno di T genera il passato, il bordo genera il presente ed infine l'interno di T genera il futuro.

Più precisamente il passato, il futuro ed il presente sono descritti rispettivamente dagli spazi di Hilbert generati dall'esterno, dall'interno e dal bordo di T .

Il processo sarà singolare se il suo passato fino a T (qualsiasi sia T) coincide con tutto il processo (cioè con $H(X)$).

Il passato fino a T è definito dallo spazio di Hilbert $H_t(X)$ (spazio di Hilbert generato dall'esterno di T). Se invece, il lontano passato, $H_\infty(X)$, coincide con $\{0\}$ il processo è regolare. Anche qui vi sono condizioni spet-

trali che caratterizzano queste nozioni. Il processo è regolare (secondo Chay-Rozonov) se:

- (a) F è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue in $[-\pi, \pi]^n$;
- (b) esiste un polinomio trigonometrico $P(\lambda)$ non identicamente nullo, tale che,

$$\int_{[-\pi, \pi]^n} |P(\lambda)|^2 f^{-1}(\lambda) d\lambda > \infty.$$

Il processo è singolare se:

$$\int_{[-\pi, \pi]^n} |P(\lambda)|^2 f^{-1}(\lambda) d\lambda = \infty.$$

La nozione più importante della teoria di Chay-Rozonov è quella di L -campo. I processi L -campi sono particolari generalizzazioni dei processi autoregressivi.

Un processo X_t è un L -campo se soddisfa la seguente equazione stocastica:

$$\begin{cases} X_t = \sum_{s \in L} a_s X_{t-s} + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t \perp X_u \quad u \neq t \end{cases} \quad (9)$$

Ricordiamo che per gli ARU invece è $\varepsilon_t \perp X_u$ quando $u \leq t$. Gli L -campi soddisfano delle relazioni del tipo:

$$E(X_i | X_j, j \neq i) = \sum_{j \neq i} b_{ij} X_j. \quad (10)$$

La (10) rileva dal punto di vista statistico l'importanza degli L -campi. In quanto se $X = (X_1, \dots, X_N)'$ è un N -campione osservato di X_t , allora l'inversa Γ^{-1} della matrice di covarianza di X si può calcolare immediatamente a partire dalla (10) in quanto:

$$b_{ij} = \frac{\sigma^{ij}}{\sigma^{ii}} \quad \text{dove } r^{-1} = (\sigma^{ij})_{ij}.$$

La (10) permette quindi di risolvere in modo semplice il difficile problema del calcolo della Γ^{-1} .

Un'altra proprietà importante degli L -campi è che i processi AR (autoregressivi) sono tutti L -campi. Basta pensare che gli AR si ottengono invertendo le MA (medie mobili) e che gli ARU sono casi particolari degli

AR, per concludere che gli L -campi modellano bene quasi tutti processi spaziali regolari.

Possiamo dare una idea della nozione di L -campo in \mathbb{Z} osservando che il processo: $X_t = V \cos \alpha t + V \sin \alpha t$, dove $\alpha = \pi t$, $2r \notin \mathbb{Z}$ è un L -campo.

La densità spettrale degli L -campi regolari è data dalla seguente formula:

$$f(\lambda) = \frac{k}{\left| 1 - \sum_{s \in L} a_s e^{i \langle \lambda, s \rangle} \right|} \tag{11}$$

Lasciamo ora i modelli per affrontare i problemi più strettamente statistici quali la stima, i test e la simulazione. Il problema della previsione essendo troppo complesso per essere trattato in così poco spazio viene tralasciato così come tralascieremo anche lo studio dei processi singolari.

1.3 STIMA

Abbiamo già incontrato una notevole differenza tra le serie storiche e i processi spaziali: l'assenza in \mathbb{Z}^n , $n > 1$ di un ordine algebrico. Questa mancanza si ripercuote su tutta la teoria dei processi spaziali.

Vediamo ora una seconda importante differenza tra serie storiche e processi spaziali. La differenza è di natura essenzialmente statistica ed è ricordata in letteratura col nome di effetto bordo. Possiamo riassumere l'effetto bordo come segue.

Osserviamo il processo X_t , $t \in \mathbb{Z}^n$ su un sottoinsieme $P \subseteq \mathbb{Z}^n$. Se P è una ipersfera in \mathbb{Z}^n contenente N punti allora il bordo di P contiene $N^{1-1/n}$ punti. Ebbene quasi tutte le procedure di stima proposte generano stimatori con una distorsione dell'ordine di $N^{-1/n}$, ossia in percentuale dell'ordine del numero di punti appartenenti al bordo.

Per capire l'origine di questa distorsione esaminiamo gli stimatori MV (max verosimiglianza) nel caso di un processo gaussiano lessicograficamente regolare). Un calcolo non difficile anche se lungo dimostra che la log-verosimiglianza è descritta dalla seguente formula:

$$L_N = \log \det \Gamma_N + \sum_{t \leq N} (\varepsilon_t | X)^2 \tag{12}$$

La (12) deriva dalla rappresentazione ARU del processo e cioè dalla:

$$X_t = \sum_{s \geq 0} d_s X_{t-s} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}^n. \tag{13}$$

Ora nelle (12) e (13) appaiono delle serie infinite che ai fini dei calcoli dovremmo troncare. Vi sono molti modi per approssimare la (12) e la (13). I più importanti consistono nel troncare la (13) costringendo gli indici $t-s$ a variare in P . Ossia la (13) è sostituita dalla:

$$X_t = \sum_{\substack{(t-s,t) \in P^2 \\ s > 0}} d_s X_{t-s} + \varepsilon_t. \quad (14)$$

Già la (14) ci spiega l'origine degli effetti bordi. Infatti, essendo $s > 0$ la (14) trascura tutte le componenti che debordano da P . Le approssimazioni che si ottengono per questa via sono essenzialmente due. Una è quella di Box-Jenkins che è così definita:

$$L_N^{BJ} = N \log \sigma_\varepsilon^2 + \sum_{t \in P} \sigma_t^2,$$

e cioè la forma quadratica "infinita", $\sum_{t \leq N} (\varepsilon_t | X)^2$ è sostituita dalla $\sum_{t \in P} \eta_t^2$ e il det Γ_N è sostituito da $N \log \sigma^2$.

L'altra approssimazione è quella di Whittle che si ottiene sostituendo la forma quadratica con la quantità, $\sum_{t \geq 1} \eta_t^2$. L'approssimazione di Whittle può essere posta sotto forma integrale come segue:

$$L_N^W = \frac{N}{(2\pi)^n} \int_{[-\pi, \pi]^n} \left(\log f(\lambda) + \frac{I_N(\lambda)}{f(\lambda)} \right) d\lambda,$$

dove

$$I_N(\lambda) = \frac{1}{\prod_{i=1}^n n_i} \left| \sum_{s \in P} X_s e^{i\langle \lambda, s \rangle} \right|^2.$$

Massimizzando le funzioni L_N^{BJ} e L_N^W si ottengono stimatori consistenti che sono (al finito) $N^{-1/n}$ distorti. Guyon ha sviluppato un procedimento di stima che genera stimatori consistenti che sono \sqrt{N} distorti. Il metodo consiste nel massimizzare la funzione di Guyon così definita:

$$L_N^G = N \left(\log \sigma_\varepsilon^2 + \sum_k e^{i\langle \lambda, k \rangle} C_N^*(k) \right), \quad (15)$$

dove

$$C_N^*(k) = \frac{1}{\prod_{i=1}^n (n_i - |k_i|)} \sum_P X_t X_{t+k}$$

e

$$k = (k_1, \dots, k_n).$$

Dal punto di vista numerico le approssimazioni descritte in precedenza hanno una notevole proprietà. Guyon-Prum hanno infatti dimostrato il seguente risultato. Se L_N è una qualsiasi delle seguenti quantità: L_N^W , L_N^{BJ} , L_N^G allora,

$$\sup_{k=0,1,2} \sup_{\Theta} |L_N^{(k)} - L_N^{(k)}| = 0_{L^1} \left(\prod_{i=1}^n n_i \right). \tag{16}$$

Nella (16) $L_N^{(k)}$, $L_N^{(k)}$, $k = 0, 1, 2$ indicano rispettivamente la verosimiglianza e la sua approssimazione, la derivata prima ($k = 1$) e la derivata seconda della verosimiglianza e della sua approssimazione. La (16) è valida se Θ è un insieme relativamente compatto in \mathbb{R}^p e se, $\inf_i(n_i) \rightarrow +\infty$.

Lasciamo il metodo MV per affrontare il caso dei processi non gaussiani.

A questo proposito Guyon-Prum hanno dimostrato che se si verificano alcune condizioni (verificate praticamente da tutti i modelli descritti in questo lavoro) allora si può usare la L_N^G per ottenere stimatori consistenti anche se il processo è non gaussiano. Le condizioni sono le seguenti:

- (a) l'insieme osservato P_N va all'infinito con la stessa velocità in tutte le direzioni;
- (b) $f_\theta \neq f_{\theta'}$, in $L^1([-\pi, \pi]^n)$ se $\theta \neq \theta'$;
- (c) f continua e non nulla su $[-\pi, \pi]^n \times H$, con H relativamente compatto in \mathbb{R}^p ;
- (d) f, f'_θ, f''_θ sono derivabili rispetto λ_i^n per $i, 1, \dots, n$ in $L^2([pi, \pi]^n)$.

Indicheremo con H queste quattro ipotesi.

Se in una procedura di stima si usa la verosimiglianza di un processo gaussiano anche quando il processo non è gaussiano la procedura è detta di pseudo verosimiglianza.

Nel caso che il processo sia un L -campo o un ARU si può ricorrere alle formula di Yule-Walker per stimare i parametri del processo. Le formule di Yule-Walker sono calcolate usando la stima della autocovarianza ottenuta col metodo dei momenti e cioè con la seguente stima:

$$C_N(k) = \frac{1}{N} \sum_{t \in P} X_t X_{t+k}. \tag{17}$$

La (17) è una stima consistente che è \sqrt{N} distorta per $n \geq 2$. Un altro procedimento di stima che genera stime \sqrt{N} distorte e consistenti nel

caso che il processo sia ARU è la stima ai minimi quadrati. Queste stime si ottengono minimizzando la quantità:

$$Q = \sum_P \varepsilon_t^2. \quad (18)$$

Per altri metodi di stima si veda la bibliografia.

All'inizio abbiamo presupposto che il processo abbia media nulla. Questa non è una forte limitazione in quanto è facile stimare la media. Infatti Karlsen dimostra che una stima consistente della media è data da:

$$\hat{\mu}_N = \frac{1}{\prod_{i=1}^n n_i} \sum_{1 \leq t_i \leq n_i} X_{t_i}. \quad (19)$$

Per concludere con la stima è utile osservare che in \mathbb{Z}^n vi sono molti modi per fare divergere le osservazioni. Il modo più studiato è quello di fare tendere N all'infinito quando $\inf_{i=1, \dots, n} n_i$ diverge.

In varie occasioni abbiamo preso $N = \prod_{i=1}^n n_i$ è ovvio che in questo caso si è supposto di osservare un insieme P iperrettangolare di lati n_i , $i = 1, \dots, n$.

1.4 TEST

Come verifica di ipotesi consideriamo quelle derivanti dall'uso della verosimiglianza e della pseudoverosimiglianza. La costruzione delle statistiche test si deducono dalle varie approssimazioni L_N^W , L_N^{BJ} e L_N^G introdotte in precedenza.

Ci limiteremo al seguente sistema di ipotesi:

$$\begin{cases} H_P \cdots \underline{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_p) \\ H_q \cdots \underline{\theta} = (\theta_1 | \cdot \theta_p, \theta_{p+1}, \theta_q). \end{cases}$$

Il vettore θ essendo il vettore che parametrizza il processo. Per risolvere il sistema di ipotesi Whittle propone la seguente statistica:

$$\Delta_{q-p}^W(N) = L_{N,p}^W(\hat{\theta}_{N,p}^W) - L_{N,q}^W(\hat{\theta}_{N,q}^W), \quad (20)$$

con $\hat{\theta}_{N,r}^W$ indichiamo la soluzione dell'equazione, $L_N^W(\hat{\theta}_r) = \underline{0}$, $r = p, q$.

Nel caso che il processo verifica la condizione H , Guyon-Prum propongono la statistica test analoga alla (20) calcolata con la funzione L_N^G .

Questi due autori hanno dimostrato che la statistica $\Delta_{q-p}^G(N)$ che così si ottiene converge in legge ad un χ_{q-p}^2 se $\underline{\theta}_0 \in H_p^{q-p}$. Per quanto detto la verifica di ipotesi ora descritta si applica anche a processi non gaussiani.

1.5 SIMULAZIONE

Al Assali nella sua tesi di dottorato ha proposto vari metodi per simulare un processo. Ne ricorderemo uno solo. L'unica ipotesi del metodo è che sia nota la densità spettrale del processo. L'idea base consiste nel discretizzare la formula di Stone associata al processo.

Se $F_t(\lambda) = e^{i\langle \lambda, t \rangle}$ allora possiamo decomporre $[-\pi, \pi]^n$ in $\prod_{i=1}^n n_i$ cubi, $\Delta_{i_1}, \dots, \Delta_{i_n} = X_{j=1}^n \Delta_{ij}$ centrati nei punti $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_n}$. Ponendo $F_{n,t} = F_t(\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_n})$ per $\lambda \in \Delta_{i_1} \times \dots \times \Delta_{i_n}$, il processo X_t è approssimato dal processo così definito:

$$\begin{aligned} X_t^{(n)} &= \int_{[-\pi, \pi]^n} F_{n,t}(\lambda) \phi(d\lambda) = \\ &= \sum_{(i_1, \dots, i_n)} F_n(\gamma_{i_1}, \dots, \gamma_{i_n}) \phi(\Delta_{i_1}^*, \dots, \Delta_{i_n}^*). \end{aligned} \quad (21)$$

Al Assali dimostra che se X_t è simulato sull'insieme $P_N \subseteq X_{i=1}^n [1, N_i]$ abbiamo che:

- (a) $\sup_{t \in P_N} E(X_t^{(n)} - X_t)^2 \rightarrow 0$;
- (b) $X_t^{(n)} \xrightarrow{\text{legge}} X_t, t \in P_N$.

La (a) è asintotica alla quantità $(\sum_{i=1}^n \frac{N_i}{n_i})^2$ allorché la (b) converge come la $\sum_{i=1}^n \frac{N_i}{n_i}$.

CONCLUSIONI

Per $n > 1$ la teoria dei processi si complica per vari motivi. Tra questi i più importanti sono l'assenza in \mathbb{Z}^n , $n > 1$ di teoremi fondamentali quali quello di Riesz-Fejér e quello di D'Alembert-Gauss. Questi teoremi giocano un ruolo importante nella teoria delle rappresentazioni lineari delle serie storiche in quanto sono teoremi molto semplici da applicare.

In \mathbb{Z}^n si è costretti invece per arrivare a conclusioni analoghe a quelle di \mathbb{Z} , ricorrere ad artifici ad hoc. Ricordiamo che i teoremi di Fejér e di D'Alembert sono gli strumenti base per riconoscere tra le varie possibili rappresentazioni di un processo quella che descrive la decomposizione di Wold.

Nel lavoro si sono sviluppate solo alcune approssimazioni della verosimiglianza e si è solo accennato ad alcuni problemi anche se fondamentali. Per quanto riguarda le approssimazioni è utile ricordare che se conosciamo

la "struttura" del processo allora è "facile" approssimare la matrice Γ di covarianza campionaria. Molto utile in questo senso è la rappresentazione L -campo.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- AL ASSALÌ (1981). Processus spatiaux: modèles, simulation, estimation. Thèse de 3ème cycle, Orsay.
- BOX-JENKINS (1970). Time series analysis, forecasting and control, Holden Day.
- CELANT GIORGIO (1984). Alcuni problemi connessi a processi stocastici spaziali, estratto dagli Atti della XXXII Riunione Scientifica, Sorrento, 11-13 aprile.
- CELANT GIORGIO (1988). Alcuni problemi statistici relativi ai processi stocastici singoli spaziali, Statistica, anno XLVIII, n.1-2.
- GUYON X. (1982). Parameter estimation for a stationary process on \mathbb{Z} , Biometrika, pp. 95-105.
- GUYON X. ET PRUM B. (1976). Estimation et tests relatifs aux processus spatiaux réguliers d'ordre second, Publication n.201, Université d'Orsay.
- TJÖSTHEIM D. (1978). Statistical spatial series modelling, Adv. Appl. Probab., 10, pp. 130-154.
- WHITTLE P. (1954). On stationary processes in the plane, Biometrika, 41, pp. 434-439.

SPATIAL STOCHASTIC PROCESSES: MODELS, ESTIMATION AND SIMULATION

Summary

In this paper we find out the differences between spatial processes and time series. Then, we examine estimation and simulation problems for some important spatial processes.