Rivista di Statistica Applicata, Vol. 16 N. 4 (Dicembre) 1983

Un test per la verifica dell'ipotesi funzionale complessa, con particolare riferimento al controllo della normalità

Luigi Pace, Istituto di Statistica, Università Cattolica del Sacro Cuore, Brescia

Da un nuovo approccio al problema della verifica dell'ipotesi funzionale complessa è ricavato un test di normalità che, confrontato con il test di Shapiro e Wilk, unisce ad una notevole agilità d'uso interessanti prestazioni di potenza, come emerge dalle prove di simulazione riportate.

1. Premessa

Proponiamo qui una soluzione generale del problema, ormai classico, della verifica statistica « parameter-free » delle ipotesi funzionali. Il caso senz'altro più noto è la verifica della provenienza da una popolazione di tipo normale, con ignoti parametri μ e σ, del campione bernoulliano osservato $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Ci concentreremo, per la sua rilevanza, su tale controllo di normalità, facendo competere il test che sorge dal nuovo approccio con il test di Shapiro e Wilk, accreditato da vari studi (Shapiro *et al.*, 1965; Shapiro *et al.*, 1968; Stephens, 1974) come il test di normalità più potente contro un vasto spettro di alternative. Introduciamo subito le necessarie chiarificazioni sul problema di verifica d'ipotesi che affrontiamo. Sia $\mathscr{F}_0$ una famiglia di variabili casuali (v.c.) unidimensionali definita da

$$\mathscr{F}_0 = \{X : X = \mu + \sigma X_0 ; \quad \mu \in R, \ \sigma > 0\} \tag{1}$$

ove X_0 — la variabile tipo della famiglia — è assolutamente continua e completamente specificata, con funzione di ripartizione (f.r.) $F_0(x)$ e funzione di densità (f.d.) $f_0(x)$, che supporremo continua.

Ad una famiglia siffatta ci si può ricondurre (Pesarin, 1981) se, detta $F(x, \vartheta_1, \vartheta_2)$ la f.r. del generico membro di una famiglia di v.c. dipendente da due parametri, esistono due funzioni continue, reali e monotone q e g, non dipendenti da ϑ_1 e ϑ_2, biunivoche e continue, per cui valga la linearizzazione

$$q\,[F(x, \vartheta_1, \vartheta_2)] = a + bg(x)\,. \tag{2}$$

Infatti, la v.c. $g(x)$ sarà il membro generico di una famiglia del tipo (1) avente come variabile tipo $q(U)$, ove $U = R(0, 1)$ è la rettangolare tipo. I due parametri ϑ_1 e ϑ_2 non saranno più in generale di locazione e scala, e quindi, salva la necessità di operare sulle osservazioni la trasformazione g, le famiglie del tipo (1) ricomprendono famiglie più generali. Sulla base di n osservazioni bernoulliane $x_1, \ldots, x_n$ tratte da una v.c. X, vogliamo dunque verificare il sistema d'ipotesi complesso

$$\begin{cases} H_0 : X \in \mathscr{F}_0 \\ H_1 : X \notin \mathscr{F}_0 . \end{cases} \tag{3}$$

Si tratta di un problema di bontà d'attamento in presenza di parametri ignoti, affrontato disponendo di un campione completo.

2. Il test W_N

Indichiamo, come d'uso, con $X'_1, \ldots, X'_n$ le variabili corrispondenti al campione ordinato in senso crescente, cioè le « order statistics » di $X_1, \ldots, X_n$. La relazione lineare che l'ipotesi nulla pone fra X e X_0 implica una relazione lineare fra i valori medi m_{0i} delle « order statistics » di dimensione n della variabile tipo X_0 e i valori osservati ordinati:

$$X'_i = \mu + \sigma\, m_{0i} + \varepsilon_i \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{4}$$

dove ε_i sono v.c. di media nulla.

Questa circostanza dà luogo a tests miranti a verificare la linearità della relazione tra i valori medi delle X'_i e le m_{0i}, indicati collettivamente da Shapiro *et al.* (1981) come « tests di regressione ». Si possono collocare in tale classe le soluzioni proposte da d'Agostino (1971), De Wet *et al.* (1973), Filliben (1975), Csörgo *et al.* (1979); Pesarin (1981), nonché la via indicata da Shapiro *et al.* (1965), Shapiro *et al.* (1972). Quest'ultima, come abbiamo anticipato, mostra prestazioni di potenza particolarmente brillanti e conviene esaminarla in dettaglio.

Se X_0 ammette media nulla e varianza finita, che per comodità supporremo unitaria, e vale H_0, il parametro di scala σ nella (4) si identifica con lo scarto quadratico media della v.c. osservabile X. È pertanto possibile giudicare della bontà del modello (4) tramite una particolare analisi della varianza, ossia confrontando il quadrato della miglior stima lineare di σ, ottenuta considerando (4) come un usuale modello di regressione, con la varianza compionaria s^2, che ovviamente stima la varianza di X sia sotto H_0 sia sotto H_1.

La miglior stima lineare di σ, sia, $\hat{\sigma}$, sarà una media ponderata delle osservazioni $X'_1, \ldots, X'_n$, ove i pesi differiranno da famiglia a famiglia, dipendendo in generale dal vettore $m' = (m_{01}, \ldots, m_{0n})$ e dalla matrice V di varianze e covarianze delle « order statistics » di dimensione n tratte da X_0. Ogni famiglia quindi comporta uno studio a sé stante ed una tabulazione di tali pesi, di fatto disponibili per le sole normali ed esponenziali. Limitiamoci ad esaminare l'applicazione della logica su esposta al controlo di normalità. In tale caso, se indichiamo con $X' = (X'_1, \ldots, X'_n)$ il vettore riga delle osservazioni ordinate in senso crescente, lo stimatore lineare di minima varianza di σ è

$$\hat{\sigma} = (m' V^{-1} m)^{-1} m' V^{-1} X \tag{5}$$

(dei minimi quadrati generalizzati), ove m e V sono ora riferiti ai campioni n-ordinati tratti dalla normale tipo. Si consideri la quantità

$$S_1 = (m' V^{-2} m)^{-1/2} m' V^{-1} X = a' X \tag{6}$$

che differisce da σ per una costante moltiplicativa, e gode della normalizzazione $a' a = 1$ dei coefficienti della forma lineare.

Poiché V^{-1} è una matrice simmetrica e per la simmetria della normale tipo $- m_{0i} = m_{0,n+1-i}$, anche per a' varrà $- a_i = a_{n+1-i}$, per cui si può anche scrivere

$$S_1 = \Sigma_{1\,j}^{[n/2]} a_{n+1-j} (X'_{n+1-j} - X'_j). \tag{7}$$

Si osservi in (7) come S_1 non dipenda dal parametro di locazione μ. A meno della costante moltiplicativa anzidetta, solo sotto H_0 S_1 è stima di σ; invece la devianza $\Sigma_{1\,i}^{n} (X_i - \overline{X})^2$ sarà sempre stima corretta di $(n - 1)\sigma^2$. Pertanto ci si può attendere che il rapporto, invariante rispetto a μ e a σ,

$$W_N = S_1^2 / \Sigma_{1\,i}^{n} (X_i - \overline{X})^2 \tag{8}$$

tenda ad assumere sotto H_1 valori dissimili da quelli che gli sono tipici valendo l'ipotesi nulla, e quindi sia atto a fornire un test di normalità.

Shapiro e Wilk corroborano questa argomentazione euristica con uno studio di simulazione che mostra come — per tutte le alternative considerate — i valori campionari assunti da W_N tendano ad essere inferiori a quelli mostrati sotto H_0. Di conseguenza propongono W_N come test ad una coda, i valori piccoli essendo significativi. Mostrano inoltre che il valore massimo assumibile da W_N è 1.

Si può giustificare la particolare posizione della regione di rifiuto reinterpretando W_N come un r^2. Si hanno infatti le eguaglianze

$$W_N = \frac{(\Sigma_{j=1}^{n} a_j X'_j)^2}{\Sigma_{j=1}^{n} (X_j - \overline{X})^2} = \frac{(\Sigma_{j=1}^{n} (a_j - \overline{a})(X'_j - \overline{X}))^2}{\Sigma_{j=1}^{n} (a_j - \overline{a})^2 \Sigma_{j=1}^{n} (X'_j - \overline{X})^2} \qquad (9)$$

ove si tenga conto che $\overline{a} = 0$, $\Sigma_{j=1}^{n} a_j^2 = a' a = 1$. Ora, se tra gli a_j e gli X'_j esistesse, sotto H_0, una relazione lineare, la regione critica più naturale sarebbe appunto costituita dai valori « troppo bassi ». In effetti, tale relazione lineare si ha nel test W'_N di Shapiro e Francia, versione semplificata (dei minimi quadrati ordinari) di W_N per grandi campioni, ove appunto i pesi $b' = (m' m)^{-1/2} m'$ che costituiscono gli a' nella (6) sono proporzionali a m'.

Si vede però che i due test asintoticamente coincidono perché per la normale tipo $m' V^{-1}$ converge asintoticamente a $(1/2) m'$, ossia il vettore m' dei valori attesi delle « order statistics » è asintoticamente autovettore della loro matrice V di varianze e covarianze (Stephens, 1975). Tale convergenza è rapida ed è già sfruttata per un calcolo approssimato degli a_j, ad eccezione dei valori estremi, per le numerosità campionarie superiori a venti (Shapiro *et al.*, 1965).

Accade quindi che a' è all'incirca proporzionale a m'; allora, sotto H_0, esiste fra gli a_j e gli X'_j una relazione stocastica approssimativamente lineare. Ci si può invece legittimamente attendere che sotto H_1 la linearità della relazione fra le due successioni sia meno accentuata, e W_N assuma valori tendenzialmente più piccoli.

I coefficienti a_j — per $3 \leq n \leq 50$ — che occorrono per il calcolo del test di Shapiro e Wilk, e i b_j — per $50 \leq n \leq 100$ — che entrano nella versione semplificata di Shapiro e Francia, come pure i rispettivi punti critici (la distribuzione nulla varia con n, e si concentra sempre più su 1 al crescere della numerosità campionaria) si desumono dalle tavole pubblicate da tali autori negli articoli citati. In pratica, tutto ciò rende abbastanza laboriosa l'implementazione su calcolatore di questi tests. Lo sforzo è però compensato dalle ottime proprietà di potenza che essi mostrano contro le alternative saggiate negli studi di simulazione.

3. Il test Z_N

Stephens (1974), facendo il punto sull'uso dei tests proposti per l'ipotesi funzionale semplice applicati ai dati trasformati secondo la f.r., ove gli ignoti parametri sono stimati tramite statistiche sufficienti (tests EDF con parametri stimati), rileva che alcuni, quali W^2 di Cramér e von Mises e A^2 di Anderson e Darling, hanno per la verifica della normalità un andamento della potenza non gravemente inferiore a quello di W_N. Il loro vantaggio è di ordine pratico, dal momento che il calcolo non richiede particolari coefficienti e che, opportunamente normalizzati in funzione di n, i loro punti critici — approssimati — sono sintetizzabili in un'unica riga.

Il test che qui proponiamo si prefigge gli stessi vantaggi dei tests EDF con parametri stimati, senza dover subire una generale riduzione della potenza rispetto alle prestazioni di W_N.

Ammettiamo valida H_0, ossia $X = \mu + \sigma X_0$, ove X_0 è una v.c. assolutamente continua, con f.r. $F_0(x)$ e f.d. $f_0(x)$, continua.

È noto che, asintoticamente, la v.c. $X'_{0,i+1} - X'_{0i}$ ($n \to \infty$, $i/n \to p \neq 0, 1$) ha distribuzione esponenziale (per questo risultato e per gli altri citati si veda Pyke, 1965). Per la variabile esponenziale questo vale per ogni $n \geq 2$. Infatti, se indichiamo con E'_j i valori ordinati di un campione bernoulliano di ampiezza n tratto dalla v.c. esponenziale tipo (avente parametro di scala unitario e parametro di locazione nullo), anche le $n-1$ differenze

$$Y_j = (E'_{j+1} - E'_j)(n-j) \quad j = 1, \ldots, n-1 \tag{10}$$

costituiscono un campione bernoulliano tratto dalla esponenziale tipo. Cerchiamo una relazione tra $X'_{0,i+1} - X'_{0i}$ e $E'_{i+1} - E'_i$, in modo da ricavare il parametro di scala di $X'_{0,i+1} - X'_{0i}$, considerata come esponenziale. Indichiamo con $F_E(x)$ la f.r. della esponenziale tipo, $F_E(x) = 1 - \exp(-x)$. Si noti fin d'ora che $dF_E(x)/dx = 1 - F_E(x)$. La differenza $X'_{0,i+1} - X'_{0i}$ si può anche scrivere

$$X'_{0,i+1} - X'_{0i} = F_0^{-1}(F_E(E'_{i+1})) - F_0^{-1}(F_E(E'_i)). \tag{11}$$

Seguendo Pyke (1965), osserviamo che per il teorema del valor medio, applicabile per le ipotesi fatte su F_0 e su f_0, si ha anche

$$X'_{0,i+1} - X'_{0i} = (E'_{i+1} - E'_i) \left. \frac{dF_0^{-1}(F_E(y))}{dy} \right|_{y^*} \tag{12}$$

$$E'_i \leq y^* \leq E'_{i+1}.$$

Ora,

$$\frac{dF_0^{-1}(F_E(y))}{dy} = \frac{1 - F_E(y)}{f_0\{F_0^{-2}(F_E(y))\}}. \tag{13}$$

Proponiamo qui di approssimare y* con $F_E^{-1}(F_0(X'_{0i}))$: asintoticamente i due valori coincideranno se $i/n \to p \neq 0, 1$. Da (12) e (13) si ricava che, per $n \to \infty$, $i/n \to p \neq 0, 1$

$$X'_{0,i+1} - X'_{0i} = (E'_{i+1} - E'_i)\,\frac{1 - F_0(X'_{0i})}{f_0(X'_{0i})}. \tag{14}$$

Tenendo conto della (10) otteniamo l'eguaglianza asintotica

$$(n-i)\,(X'_{0,i+1} - X'_{0i})\,\frac{f_0(X'_{0i})}{1 - F_0(X'_{0i})} = Y_i. \tag{15}$$

In definitiva, dunque, le differenze successive tra i valori ordinati, così standardizzate, tendono a distribuirsi, al crescere di n, come $n-1$ determinazioni esponenziali tipo indipendenti. Di fatto però, valendo H_0, non disponiamo di un campione $X'_{01}, \ldots, X'_{0n}$ dalla variabile tipo, ma di osservazioni $\mu + \sigma X'_{0i}$, con μ e σ ignoti. L'ignoranza dei parametri ci induce a stimare il « tasso di guasto » $f_0((X'_i - \mu)/\sigma)/1 - F_0((X'_i - \mu)/\sigma)$ con $f_0((X'_i - \hat{\mu})/\hat{\sigma})/1 - F_0((X'_i - \hat{\mu})/\hat{\sigma})$, ove $\hat{\mu}$ e $\hat{\sigma}$ siano stimatori equivarianti di μ, σ.

Indichiamo con $\hat{X}'_{0i}$ il valore $(X'_i - \hat{\mu})/\hat{\sigma}$, e consideriamo le $n-1$ quantità

$$D_i = (n - i)\,(X'_{i+1} - X'_i)\,\frac{f(\hat{X}'_{0i})}{1 - F_0(\hat{X}'_{0i})}. \tag{16}$$

Esse sono sparametrizzate rispetto a μ, sono « quasi-indipendenti » e hanno distribuzione « quasi-esponenziale ». Le possiamo trasformare in $n-2$ v.c. sparametrizzate anche rispetto a σ:

$$U'_j = \frac{\Sigma_{i=1}^{j} D_i}{\Sigma_{i=1}^{n-1} D_i}. \quad j = 1, \ldots, n-2 \tag{17}$$

Le U'_j sono ordinate e variano fra zero e uno. Se le D_i fossero esattamente esponenziali indipendenti, le U'_j costituirebbero un campione $(n-2)$-ordinato dalla rettangolare tipo. Per le approssimazioni introdotte — anzitutto perché i parametri sono surrogati dalle stime — le U'_j assumeranno anche asintoticamente una configurazione soltanto simile a quella. Sotto H_1 invece si può ritenere che le U'_j si distribuiranno in $(0, 1)$ meno uniformemente, con addensamenti e rarefazioni in corrispondenza delle regioni in cui il « tasso di guasto », stimato nell'ipotesi che valga H_0, sottostimi o sovrastimi sistematicamente il vero tasso di guasto, $f(X'_i)/(1 - F(X'_i))$. È pertanto ragionevole applicare alle U'_j gli usuali tests funzionali dell'ipotesi semplice, con l'avverteza che, a causa delle varie approssimazioni invocate, la loro distribuzione sotto H_0 dipenderà dalla famiglia $\mathscr{F}_0$ e sarà, in pratica, conveniente trovare i punti critici con metodi Montecarlo. Risalta subito la generalità della soluzione qui introdotta, a paragone di quella del tipo « analisi della varianza » alla Shapiro e Wilk ove, ripetiamo, lo stimatore lineare σ di σ dipende in generale, per ogni famiglia ed ogni numerosità campionaria, da coefficienti da tabulare, per cui i tests di fatto disponibili sono quelli di esponenzialità e normalità.

Volendo peraltro condurre il confronto dei due approcci nel caso di verifica della normalità, particolarizziamo la trasformazione (17), che diviene

$$U'_{Nj} = \frac{\Sigma_{i=1}^{j} (n-i)\,(X'_{i+1} - X'_i)\,\exp(-\hat{X}_i'^2/2)/(1-\Phi_0(\hat{X}'_i))}{\Sigma_{i=1}^{n-2} (n-i)\,(X'_{i+1} - X'_i)\,\exp(-\hat{X}_i'^2/2)/(1-\Phi_0(\hat{X}'_i))} \tag{18}$$

ove $j = 1,\ldots,n$; $\Phi_0(x)$ è la f.r. della normale tipo calcolata nel punto x; $\hat{X}'_i = (X'_i - \overline{X})/s$; $\overline{X} = \Sigma_{i=1}^{n} X_i/n$ e $s^2 = \Sigma_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2/(n-1)$ sono le usuali stime di media e varianza. Chiameremo Z_N il test A^2 di Anderson e Darling applicato alle $n-2$ statistiche U'_{Nj}, ossia

$$Z_N = -(n-2) - (1/(n-2))\,\Sigma_{j=1}^{n-2} (2j-1)\,[\ell n U'_{Nj} + \ell n(1 - U'_{N,n+1-j})]. \tag{19}$$

La regione critica sarà ovviamente costituita dai valori anomalmente alti del test. Sotto H_0, Z_N conserva la proprietà di A^2 di convergere rapidamente alla distribuzione asintotica, per cui i punti critici sono in pratica invariati con n. La Tab. I illustra la stima con metodo Montecarlo dei punti critici corrispondenti ai livelli di significatività α più usuali, per alcuni valori di n (campioni piccoli e medi). Sono state usate 10000 replicazioni dell'esperimento di estrazione pseudocasuale di campioni di numerosità n da una normale presa per semplicità standardizzata.

Tab. I - Stima Montecarlo di alcuni valori critici di Z_N.

α / n	0.10	0.05	0.02	0.01
5	*1.169	1.512	2.051	2.422
10	*1.177	1.483	1.862	2.232
20	1.227	1.513	1.948	2.201
30	1.241	1.532	1.998	2.305
40	1.239	1.534	1.932	2.248
50	1.246	1.547	1.934	2.233

Tab. II - Potenza (in %) dei test di Normalità W_N e Z_N contro alcune alternative alle numerosità compionarie 10, 20, 30; stima Montecarlo basata su 2000 replicazioni.

	n=10 α=0.10		n=20 α=0.10		n=30 α=0.05	
	W_N	Z_N	W_N	Z_N	W_N	Z_N
Chi-quadr. 1	82.35	91.80	99.35	99.80	99.35	100
Esponenziale	58.65	70.95	91.00	95.15	96.00	98.90
Chi-quadr. 4	35.75	44.75	65.75	75.45	73.30	85.40
Chi-quadr. 10	20.00	25.75	36.50	44.70	33.60	44.10
Chi-q. non centr.	17.10	21.45	28.30	33.75	24.35	29.10
Lognormale	70.25	79.55	96.80	98.50	99.15	99.65
Cauchy	66.60	52.75	90.05	79.20	95.55	88.85
Rettangolare	17.75	19.80	37.20	37.35	41.15	42.80
Logistica	13.55	12.05	19.70	13.20	13.65	8.75
Be(2,1)	24.10	14.50	50.10	42.60	52.60	53.65
Laplace	21.55	17.40	43.85	21.35	34.70	18.15
T(5,2.4)	38.20	48.55	73.25	82.75	84.05	91.35
T(10,3.1)	60.80	74.80	94.50	97.95	97.95	99.75

Se si considera come riferimento la riga dei punti critici simulati per $n = 50$, le differenze $|\hat{\alpha}_{50} - \hat{\alpha}_n|$, per gli n e gli α considerati, valgono meno di 0.01, ad eccezione delle due segnate con asterisco, che distano circa due percentili. Pertanto tale riga può, senza che ciò induca gravi errori di valutazione del livello di significatività, essere usata per ogni $n \geq 5$. Questa caratteristica, unita alla facile implementabilità della funzione test, conferisce a Z_N una notevole praticità d'uso, anche su piccoli calcolatori.

Stephens (1974) lamenta il proliferare di proposte di tests funzionali, la cui validità è rilevata secondo criteri ad hoc, e propone alcune prove che le nuove soluzioni dovrebbero superare per essere presentabili con qualche utilità. In questo studio si è cercato, per quanto possibile, di non eludere quelle indicazioni, confrontando la potenza di Z_N con quella di W_N, senza dubbio il suo antagonista più valido, usando lo stesso spettro di alternative considerato da Shapiro *et al.* (1965). (Ad onor del vero, tralasciate le due v.c. discrete e con l'avvertenza che il chi-quadro non centrale là considerato sembra costruito secondo una diversa definizione).

Le simulazioni (2000 replicazioni per ogni numerosità campionaria e per ogni alternativa) hanno portato ai risultati condensati nella Tab. II. Per la loro immediata lettura, ricordiamo che le determinazioni di $T(\alpha, \lambda)$ sono definite da $T = \alpha R^{\lambda} - (1 - R)^{\lambda}$, ove R è estratta dalla rettangolare tipo. Inoltre, il chi-quadro non centrale preso in esame ha 16 gradi di libertà e parametro di non centralità 1. Il quadro che si ricava dalle prove di simulazione è, a nostro parere, lusinghiero per Z_N. La sua potenza è spesso superiore a quella di W_N — e comunque mai dominata con grave scarto. Pertanto, oltre ai vantaggi in termini di calcolo — una solo formula — e di regione critica — praticamente indipendente da n — rendono interessante Z_N anche le prestazioni di potenza.

Summary

In this paper we propose a new general goodness-of-fit testing procedure for families of univariate continuous random variables (r.v.) depending on two location and scale parameters. Let $X'_1, \ldots, X'_n$ be an ordered random sample from the r.v. X. Let the null hypothesis be $H_0: X = \mu + \sigma X_0$, where X_0 is a completely specified r.v. with distribution function (d.f.) $F_0(x)$ and continuous probability density function $f_0(x)$. Let then $\hat{\mu}$ and $\hat{\sigma}$ be estimates of μ and σ, which have to be equivariant. In order to perform a test of H_0 we can consider the $n-1$ quantities D_i in (16), where $\hat{X}_{0i} = (X'_i - \hat{\mu})/\hat{\sigma}$, and then construct the $n-2$ ordered r.v. U'_j as in (17). The U'_j are location and scale invariant and are included in $(0, 1)$. If H_0 is true, the D_i are asymptotically exponentially distributed, when $i/n \to p \neq 0, 1$. This result leads us to consider the U'_j similar to $n-2$ Uniform order statistics, and then to perform on the U'_j an ordinary goodness-of-fit test for the simple null hypothesis H_0^*: U_0 is Uniform on $(0, 1)$. The null distribution of the resulting test will depend, even asymptotically, on the particular family considered (that is, on X_0); the critical values for (n, X_0) need evaluation via empirical sampling study.

When considering the testing for Normality, we shall use in (16) the quantities $X'_{0i} = (X'_i - \bar{X})/s$, where x and s^2 are the usual estimators of mean and variance. We shall denote Z_N the Anderson-Darling test A^2 applied to the resulting U'_j. Z_N shows some advantages over the well-known normality test W_N of Shapiro and Wilk. First, there is no need for special coefficients depending on n for its computation. Secondly, its critical values are nearly invariant with n (see Tab. I). Some Monte-Carlo results concerning the power of Z_N and W_N for $n = 10, 20, 30$ are showed in table II. The power comparison is often favourable to Z_N.

Riferimenti bibliografici

Csörgo M. e Révész P., *Quadratic...ity tests*, Carleton Mathematical Series No. 162, 1979.

D'Agostino R.B., An omnibus test of Normality for moderate and large size samples. *Biometrika, 58*, 1971, 341-348.

De Wet T. e Venter J.H., Asymptotic distributions for quadratic forms with application to test of fit. *Ann. Statist., 1*, 1973, 380-387.

David H.A., *Order Statistics*, John Wiley and Sons, New York, 1970.

Filliben J.R., The probability plot correlation coefficient test for Normality. *Tecnometrics, 17,* 1975, 111-117.
Pesarin F., An asymptotically distribution-free goodness-of-fit test for Families of Statistical Distributions depending on two parameters. In: *Statistical Distributions in Scientific Work,* vol. 5, 51-56, Reidel Publ. Co., Amsterdam, 1981.
Pyke R., Spacings. *J. R. Statist. Soc. B, 27,* 1965, 395-436.
Shapiro S.S. e Brain C.W., A review of distributional testing procedures and development of a censored sample distributional test. In: *Statistical Distributions in Scientific Work,* vol. 5, 1-24, Reidel Publ. Co., Amsterdam, 1981.
Shapiro S.S. e Francia R.S., An approximate analysis of variance test for Normality. *J. Amer Statist. Assoc., 67,* 1972, 215-216.
Shapiro S.S. e Wilk M.B., An analysis of variance test for Normality (complete samples). *Biometrika, 52,* 1965, 591-611.
Shapiro S.S., Wilk M.B. e Chen H.J., A comparative study of various tests for Normality. *J. Amer. Statist. Assoc., 63,* 1968, 1343-1372.
Stephens M.A., EDF statistics for goodness of fit and some comparisons. *J. Amer. Statist. Assoc., 69,* 1974, 730-737.
Stephens M.A., Asymptotic properties for covariance matrices of order statistics. *Biometrika, 62,* 1975, 23-28.