Rivista di Statistica Applicata, Vol. 16 N. 4 (Dicembre) 1983

Medie tensoriali

Vittorio Amato, Istituto di Statistica, Università di Messina

Questo scritto vuole essere una proposta di media più generale di quella pitagorica comunemente in uso. In coordinate generali esiste infatti una dicotomia nel campo delle medie, nel senso che è possibile poter distinguere una media covariante ponderata con pesi appartenenti al sistema controvariante, da una media controvariante pesata covariantemente. Il problema impostato in questi termini può essere generalizzato a livello tensoriale. Si sottolinea la importanza del confronto o distanza tra medie tensoriali come metrica valida per lo studio delle dissomiglianze tra le unità dei caratteri osservati per fini di « cluster analysis », ossia come tecnica di classificazione.

1. Premessa

Le nozioni di vettore e di tensore sono di basilare importanza in statistica, per il semplice fatto che questa disciplina è fondata quasi esclusivamente su tali concetti. Il calcolo tensoriale si è andato notevolmente diffondendo e ha fornito importantissime applicazioni in campi specifici come ad esempio quello della geometria differenziale degli spazi non euclidei, della meccanica, e non ultimo quello della teoria della relatività di Einstein.

Con riferimento alla statistica ritengo sia opportuno partire dalla base, ossia dal concetto di media.

La media quantitativa o analitica è il risultato di una operazione matematica eseguita sopra determinati numeri o grandezze omogenee che solitamentte vengono chiamati i termini della media. Esistono come si sa numerose medie; io qui mi occuperò della media per eccellenza, e cioè della media aritmetica.

Sono note a tutti le insufficienze delle medie, anche se si tratta dell'aritmetica. Le pecche discendono dal fatto che la media non è quasi mai in grado di fornire uno strumento sufficientemente sintetico e rappresentativo di tutti i suoi termini. Essa inoltre può dar luogo a delle vere e proprie assurdità o incongruenze, note con il nome di paradosso della media aritmetica ponderata; nel senso che una media ponderata con i termini tutti più alti potrebbe risultare più piccola della media ponderata di un'altra distribuzione con i termini tutti più bassi. Con la media tensore si cerca di ovviare in parte a tali stranezze.

È doveroso da parte mia qui sottolineare che devo questo scritto al prof. Palomba il quale, recensendo nella *Rivista di Politica Economica*, dicembre 1977, il mio libro di Statistica edito dalla Cacucci di Bari, si chiede se la mia metodologia strutturale contenuta in tale volume, nonostante l'uso sistematico che io faccio dello strumento matriciale e quindi di una valida forma di generalizzazione, non sia a sua volta un caso particolare di un approccio più ampio e universale come quello tensoriale.

Un ulteriore orizzonte, secondo il Palomba, verrebbe aperto sia agli statistici come agli economisti, passando dall'algebra matriciale a quella ben più vasta e generale dei tensori. Mi rifaccio alle parole del Palomba: si parla in statistica di varie cose, ma i problemi oggi si ingigantiscono e quindi occorre avvalersi di strutture algebriche di crescente generalità. Si tratterà qui infatti di stabilire se la media definita in uno spazio euclideo sia sufficiente o se non si debba ricorrere a strutture ben più complesse, sì da dare ai problemi attuali una impostazione più confacente.

Si parlerà di medie semplici o ponderate definite in uno spazio fisico diverso da quello pitagorico. Intendo fare riferimento allo spazio nel quale il prodotto scalare è rappresentato da una forma bilineare delle coordinate dei punti, per poi passare dai vettori ai tensori, ovvero dalle forme bilineari a quelle multilineari. È chiaro che l'insieme di tutte le ennuple di numeri reali non basta per definire la struttura dello spazio ma occorre introdurre la nozione di distanza, che qui si traduce in termini di confronto tra medie tensoriali a parità di coefficienti della metrica o tensore metrico fondamentale. L'idea del raffronto tra medie tensoriali presuppone naturalmente la conoscenza di tali coefficienti, che qui sono delle costanti.

Esistono due medie ponderate: la controvariante, pesata covariantemente, e la covariante, i cui pesi appartengono al sistema contrapposto, ossia controvariante.

Nell'approccio pitagorico, come quello di una superficie piana, le due medie aritmetiche ponderate coincidono con la media aritmetica ponderata comunemente in uso.

2. Spazio vettoriale

Sia E_n uno spazio vettoriale e X, Y due vettori arbitrari di E_n, la cui base (o riferimento cartesiano) è definita dai vettori

$$e_1, \ldots, e_n \, .$$

Il prodotto scalare dei due vettori X, Y è univocamente determinato (Lichnerowicz, 1958):

$$X \cdot Y = X^i e_i \cdot Y^j e_j = X^i Y^j g_{ij},$$

essendo

$$g_{ij} = e_i \cdot e_j$$

i coefficienti della metrica, o le componenti di un tensore doppio simmetrico, detto anche tensore fondamentale. La definizione di prodotto scalare conduce automaticamente a quelle di modulo del vettore X:

$$\| X \| = \sqrt{X^i X^j g_{ij}},$$

e di ortogonalità dei vettori X, Y:

$$X \cdot Y = 0 .$$

Si è visto che mentre il prodotto scalare è una forma bilineare, il quadrato del modulo è una forma quadratica. Poiché questa ha per coefficienti le g_{ij}, essa viene chiamata metrica dello spazio vettoriale (Cattaneo, 1960).

Esiste uno e un solo angolo Θ, tale che

$$\cos \Theta = \frac{X^i Y^j g_{ij}}{\sqrt{X^i X^j g_{ij}} \ \sqrt{Y^i Y^j g_{ij}}},$$

essendo Θ l'angolo dei vettori X, Y.

3. Componenti di un vettore

In coordinate generali (Finzi e Pastori, 1961), per distinguere le componenti controvarianti da quelle covarianti del medesimo vettore X, vengono indicate con X^i le controvarianti, e con X_j le covarianti. Queste ultime si ricavano moltiplicando scalarmente il vettore X per la direzione e_j:

$$X_j = X \cdot e_j .$$

Ma essendo (*)

$$X = X^i e_i ,$$

sostituendo:

$$X_j = X^i e_i \cdot e_j = X^i g_{ij} . \tag{3.1}$$

Naturalmente, per ricavare le controvarianti mediante le cova-

(*) In ossequio alla convenzione di Einstein è stato omesso il simbolo di sommatoria.

rianti, basterà invertire la matrice non singolare avente per elementi le g_{ij}. Per fare ciò basta moltiplicare ambo i membri della (3.1) per i coefficienti inversi g^{jk}:

$$g^{jk} X_j = X^i g_{ij} g^{jk} . \tag{3.2}$$

Nel primo membro si satura l'indice j, il risultato è X^k; nel secondo membro si satura l'indice i, il risultato è $X_j g^{jk}$. Si ha pertanto la relazione inversa rispetto alla (3.1):

$$X^k = X_j g^{jk} .$$

Il prodotto scalare si può così rappresentarlo mediante le $g^{kj} = g^{jk}$:

$$X \cdot Y = X_j Y_k g^{jk} .$$

Si hanno inoltre gli invarianti (Spain, 1965):

$$X \cdot Y = X^i Y^j g_{ij} = X^i Y_i = X_j Y^j .$$

Se X e Y sono due vettori unitari, il coseno dell'angolo di tali vettori è dato appunto dalla precedente espressione:

$$\cos \widehat{XY} = X \cdot Y .$$

4. Sistemi plurimi

Un sistema formato da un solo numero, ossia da una lettera senza indice, è un sistema di ordine zero. Ciò ha luogo allorché la saturazione degli indici di covarianza e controvarianza è totale.

Un sistema formato da una lettera con un indice, come ad esempio l'insieme delle componenti X_j di un vettore, è un sistema semplice covariante.

Un sistema formato da n^2 numeri, cioè una lettera con due indici, del tipo g_{ij}, è un sistema doppio covariante.

In generale, l'espressione $X_{j_1 \dots j_h}$ rappresentata da una lettera con h indici $j_1 \dots j_h$, dove ciascuno prende i valori interi da 1 a n, è un sistema h-plo covariante. Gli elementi di un sistema h-plo sono in numero di n^h, perché tante sono le disposizioni con ripetizione di n elementi prese h ad h, senza che sia necessario che questi n^h numeri siano tutti differenti tra loro.

Un sistema doppio è simmetrico se gli elementi di esso che differiscono solo per l'ordine degli indici hanno valore uguale. Per esempio, se $A^{ij} = A^{ji}$, allora A^{ij} è un sistema doppio controvariante simmetrico.

Un sistema si dice invece antisimmetrico se, scambiando due indici tra loro, la componente cambia segno: se $B_{ij} = -B_{ji}$, allora B_{ij} è un sistema doppio covariante antisimmetrico.

In precedenza si è parlato di forme quadratiche e di forme bilineari. La più semplice forma è quella lineare. Nella forma quadratica

$$X^i X^j g_{ij} = X^i X_i ,$$

è sottintesa la sommatoria estesa alle disposizioni 2 a 2 degli indici i, j. In tale somma, il prodotto $X^i X^j$ si affaccia due volte: sotto la forma $X^i X^j$, e nella forma $X^j X^i$. Pertanto

$$g_{ij} + g_{ji}$$

non varierà scambiando i con j. Ne segue che i coefficienti g_{ij} costituiscono un sistema doppio simmetrico. Ma per individuare un sistema doppio qualsiasi attraverso i coefficienti, occorrono due ennuple di variabili indipendenti e formare la espressione

$$X^i Y^j g_{ij} = X^i Y_i .$$

Infine un sistema h-plo generico:

$$X_{j_1 \ldots j_h}$$

si può ritenere individuato da una forma multilineare costruita da h gruppi di variabili, mentre i coefficienti di una forma plurima di grado h costituiscono il più grande sistema h-plo (Levi-Civita, 1925).

5. Media controvariante

Le definizione di prodotto scalare ci conduce automaticamente alla definizione di media vettore m. Se X^i e p^i sono le componenti controvarianti dei vettori X e p di E_n, esiste una e una sola media m espressa a mo' di vettore di E_n, tale che si abbia:

$$(X - m) \cdot p = 0 .$$

Se la base dei vettori $X - m$ e p è $\{e_j\}$, allora

$$X - m = (X^i - \lambda)\, e_i ,$$

$$p = p^j e_j .$$

Moltiplicando scalarmente i due vettori si ha:

$$(X - m) \cdot p = (X^i - \lambda)\, p^j g_{ij} .$$

Ma per la definizione di media vettore, i due vettori devono essere ortogonali. Pertanto

$$(X^i - \lambda)\, p_i = 0\,;$$

da cui si ricava

$$\lambda = \frac{X^i\, p_i}{p_i}\,,$$

si tratta cioè della media aritmetica ponderata controvariante (*).

6. Media covariante

Nel paragrafo precedente, fissata la base $\{e_j\}$ dei vettori $X - m$ e p di E_n, è stata definita la media aritmetica ponderata controvariante λ, tale che si abbia

$$X^i\, p_i = \lambda\, p_i\,.$$

In modo analogo si può definire la media aritmetica ponderata covariante ℓ, tale che:

$$X_i\, p^i = \ell\, p^i\,.$$

Da quanto precede, si trae che, fissata una data base, quindi un dato riferimento cartesiano, la media aritmetica ponderata delle componenti del vettore X risulta ponderata con pesi appartenenti al sistema contrapposto. Le medie aritmetiche ponderate:

$$\lambda = \frac{X^i\, p_i}{p_i}\,, \quad \ell = \frac{X_i\, p^i}{p^i}$$

differiscono non già per gli invariati che compaiono nel numeratore, che sono identici, ma per il totale dei pesi (supposto differente da zero) che figura nel denominatore. Pertanto, le due medie sono proporzionali ai totali delle frequenze o pesi:

$$\lambda : \ell = p^i : p_i\,.$$

(*) Se, in particolare, i pesi si pongono uguali ai termini, si ricava la media antiarmonica controvariante, definita da:

$$\alpha = \frac{X^i X_i}{X_i}\,,$$

la quale si ottiene, grazie alla ortogonalità dei vettori

$$X - m \quad \text{ed} \quad X\,.$$

Eseguendo il prodotto $(X - \alpha)\cdot X$ si ha:

$$(X^i - \alpha)\, X_i = 0\,,$$

da cui si risale alla media α (Amato, 1977).

Il rapporto tra le due medie non dipende dunque dall'ammontare ma dai totali delle frequenze. Prima di chiudere questo paragrafo, riprendo l'argomento della media antiarmonica. Per quanto concerne questa media, i termini covarianti vengono pesati coi termini controvarianti, e viceversa:

$$\alpha = \frac{X^i X_i}{X_i}, \quad a = \frac{X_i X^i}{X^i},$$

essendo α e a le medie antiarmoniche controvariante e covariante.

7. Proprietà della media aritmetica

La media aritmetica gode di due proprietà notevoli: la somma degli scarti tra i termini e la media è uguale a zero; e, inoltre, la somma dei quadrati degli scarti è un minimo.

Si prenda ad esempio la media controvariante

$$\lambda = \frac{X^1 p_1 + \dots + X^n p_n}{p_1 + \dots + p_n}.$$

Le sue proprietà sono:

$$(X^i - \lambda)\, p_i = 0\,,$$
$$(X^i - \lambda)^2\, p_i = minimo\,.$$

Similmente, per quanto concerne la media covariante

$$\ell = \frac{X_1 p^1 + \dots + X_n p^n}{p^1 + \dots + p^n},$$

le proprietà sono:

$$(X_i - \ell)\, p^i = 0\,,$$
$$(X_i - \ell)^2\, p^i = minimo\,.$$

8. Definizione di media vettore nel piano

Nel piano vengono fissate due rette orientate $Z_1 Z_2$ che si incontrano nel punto O (origine delle coordinate cartesiane), e una unità di misura. Se $X = P - O$ è un vettore di tale piano, le sue coordinate X^1, X^2 si determinano conducendo da P le parallele agli assi $Z_1 Z_2$. Le componenti covarianti X_1, X_2 dello stesso vettore X si ricavano invece conducendo da P le perpendicolari agli assi $Z_1 Z_2$.

Viene fissato il verso positivo delle rotazioni nonché l'angolo Θ della prima regione angolare il cuo coseno è dato dal coefficiente g_{12}

ossia dal prodotto scalare dei due vettori della base e_1, e_2 (Comessatti, 1930):

$$e_1 \cdot e_2 = e_2 \cdot e_1 = \cos \Theta = g_{12} = g_{21} .$$

Siano X, m, p tre vettori o punti del piano $Z_1 Z_2$, e $\{e_i\}$ la loro base comune. La media vettore m ha per componenti controvarianti due numeri identici e uguali appunto alla media aritmetica controvariante λ. Il vettore m, avente per direzione quella stessa della bisettrice (luogo dei punti equidistanti dagli assi $Z_1 Z_2$) dell'angolo $\widehat{Z_1 Z_2}$, ha per componenti covarianti due numeri uguali tra loro e uguali alla media aritmetica covariante ℓ. Il modulo di m si può ricavarlo sommando sotto il segno di radice quadrata i due prodotti $\ell\lambda$, $\lambda\ell$:

$$\| m \| = \sqrt{2 \ell\lambda} . \tag{8.1}$$

Ma d'altra parte, ℓ è la proiezione ortogonale di m su Z_1:

$$\ell = \| m \| \cos 1/2 \Theta = \sqrt{2 \ell\lambda} \cdot \cos 1/2 \Theta ,$$

da cui si ricava il rapporto:

$$\ell/\lambda = 2 \cos^2 (1/ \Theta) .$$

Ma per un noto teorema di trigonometria (Franklin, 1953), secondo cui il doppio del quadrato del coseno di mezzo angolo è uguale al coseno dello stesso angolo aumentato di uno, si ha la formula del rapporto tra le medie

$$\ell/\lambda = 1 + \cos \Theta .$$

9. Medie controvariante e covariante nel piano

Noti i termini X^1, X^2 della media controvariante, ossia le componenti di X, si disegna nel piano $Z_1 Z_2$ il vettore X. Si passa a fissare nello stesso piano il vettore p le cui componenti p^1, p^2 dipendono da un fattore di proporzionalità che viene determinato grazie alla condizione di ortogonalità dei vettori rispettivamente dello *scarto* e del *peso*:

$$(X - m) \cdot p = 0 .$$

Eseguendo il prodotto e uguagliandolo a zero, si ha:

$$\lambda = \frac{X^1 p^1 + X^2 p^2 + (X^1 p^2 + X^2 p^1)\, g_{12}}{(p^1 + p^2)\,(1 + g_{12})} = \frac{X^1 p_1 + X^2 p_2}{p_1 + p_2} .$$

In particolare, nel riferimento cartesiano ortogonale, si ritrova la consueta formula della media aritmetica ponderata:

$$M_p = \frac{X^1 p^1 + X^2 p^2}{p^1 + p^2},$$

giacché in questo caso $g_{12} = \cos \pi/2 = 0$.

La media covariante è data invece dalla seguente espressione:

$$\ell = \frac{X_1 (p_1 g^{11} + p_2 g^{12}) + X_2 (p_2 g^{22} + p_1 g^{12})}{(p_1 g^{11} + p_2 g^{12}) + (p_2 g^{22} + p_1 g^{12})}.$$

Componendo i due sistemi, quello semplice covariante p_i e quello doppio simmetrico controvariante g^{ij}, si ottiene:

$$\ell = \frac{X_1 p^1 + X_2 p^2}{p^1 + p^2}.$$

10. Medie nello spazio ordinario

Nello spazio tridimensionale, la media aritmetica controvariante conterrà i prodotti $X^i p^j$ due volte: una volta nella forma testé indicata e un'altra volta nella forma $X^j p^i$; e poiché i coefficienti g_{ij} sono simmetrici, si ha per $i \neq j$ la somma:

$$(X^i p^j + X^j p^i) \, g_{ij}.$$

Per $i = j$ si ha invece l'ammontare, ovvero la somma dei prodotti dei termini per i pesi corrispondenti:

$$X^i p^i.$$

Questo valore medio differisce dalla comune media aritmetica ponderata per il fatto che ad ogni termine non va attribuito solamente il peso del termine omologo ma anche quello degli altri, e ciò attraverso i cosiddetti *incroci*, ossia le possibili combinazioni tra termini e pesi moltiplicate per i coefficienti g_{ij}. Si ha infatti la formula:

$$\lambda = \frac{X^i p^i + (X^i p^j + X^j p^i) \, g_{ij}}{p^i + (p^i + p^j) \, g_{ij}}. \quad (g_{ii} = 1)$$

L'idea di una media così fatta a differenza della pitagorica, concepisce il problema non in termini astratti o da esercitazione scolastica, ma con riferimento a un ambiente ben preciso che è quello indicato appunto dalle grandezze g_{ij}. Per esempio nella ipotesi di uno spazio nel quale i coefficienti g_{ij} sono quasi inesistenti e quindi in presenza di quasi ortogonalità delle coordinate, allora è come se si trattasse di una superficie quasi di natura piana euclidea (Palomba, 1970).

Per quanto concerne adesso la media covariante nello spazio ordinario, essa è definita dalla seguente formula:

$$\ell = \frac{X_i\, p_i\, g^{ii} + (X_i\, p_j + X_j\, p_i)\, g^{ij}}{p_i\, g^{ii} + (p_j + p_i)\, g^{ij}} .$$

Nel riferimento cartesiano ortogonale si ritrova la media usuale:

$$M_p = \frac{X_1\, p_1 + X_2\, p_2 + X_3\, p_3}{p_1 + p_2 + p_3} .$$

Le medie covariante e controvariante si identificano con M_p. Viceversa, ricorrendo alle coordinate generali, i sistemi covariante e controvariante si separano indirizzando la ricerca verso nuovi traguardi sempre più interessanti. È appunto da tale separazione che scaturisce l'idea della media tensore la quale ubbidisce a regole formali molto semplici. « Chi usa il calcolo tensoriale ne è talvolta trascinato » (Finzi e Pastori, 1961).

11. Media aritmetica semplice

La media aritmetica semplice è un caso particolare della media aritmetica ponderata allorché i pesi di quest'ultima sono costanti. Ciò significa che i due vettori m e p sono paralleli:

$$p = k\, m$$

essendo k uno scalare. Se nella equazione generale $(X - m) \cdot p = 0$, si pone $p = k\, m$, si ottiene:

$$(X - m) \cdot m = 0 ,$$

che si rfierisce per l'appunto alle medie aritmetiche semplici.

Nell'ambito di tali medie, il vettore scarto $X - m$ deve essere ortogonale al vettore media m.

Nel piano ciò significa che se $\{e_i\}$ è la base dei vettori X e m, la media aritmetica semplice controvariante μ^* dei termini X^i è data da:

$$\mu^* = \frac{X^i\,(g_{i1} + g_{i2})}{g_{i1} + g_{i2}} . \quad (i = 1, 2)$$

Analogamente, la media aritmetica semplice covariante è data da:

$$\mu_* = \frac{X_i (g^{i1} + g^{i2})}{g^{i1} + g^{i2}} .$$

Nello spazio ordinario, la media aritmetica semplice controvariantte è uguale alla media aritmetica ponderata delle X^i con pesi

$$g_{i1} + g_{i2} + g_{i3} ; \quad (i = 1, 2, 3)$$

mentre la covariante è uguale alla media aritmetica ponderata delle X_i con pesi

$$g^{i1} + g^{i2} + g^{i3} .$$

Naturalmente, tutto ciò è ripetibile in uno spazio ennedimensionale ($n > 3$) facendo cioè variare l'indice i da 1 ad n.

12. Definizione di media tensore

Finora mi sono occupato della media vettore. Il salto dalla media vettore m alla media tensore M è conseguente: scaturisce cioè logicamente, per il fatto molto semplice che il vettore è un caso particolare del tensore. Se infatti lo spazio E_n ammette un tensore simmetrico g_{ij} dotato di prodotto scalare, si potrà riconoscere anche qui l'esistenza di una possibile separazione tra componenti controvarianti e componenti covarianti di uno stesso tensore. È possibile così proporre l'idea di media tensore, allo stesso modo come si è fatto in precedenza con la media vettore: il campo tensoriale si deduce in modo analogo a quello vettoriale.

Viene associato a ogni punto di E_n un tensore di ordine s, e perciò nel caso della media tensore M, siano

$$X^{i_1 \cdots i_s} \quad , \quad P^{j_1 \cdots j_s}$$

le s-faccette dei tensori rispettivamente dei termini e dei pesi di una generica media aritmetica ponderata controvariante λ_s di ordine s. Per la condizione di ortogonalità delle due s-faccette dei tensori rispettivamente degli scarti $X - M$ e dei pesi P, la media λ_s deve essere tale che (Cattaneo, 1960)

$$(X^{i_1 \cdots i_s} - \lambda_s) P^{j_1 \cdots j_s} g_{i_1 j_1} \cdots g_{i_s j_s} = 0 ,$$

da cui si ricava

$$\lambda_s = \frac{X^{i_1 \cdots i_s} P_{i_1 \cdots i_s}}{P_{i_1 \cdots i_s}} .$$

Analogamente, per quanto riguarda la media covariante ℓ_s, in ossequio alla solita condizione di ortogonalità, si ha:

$$(X_{i_1 \dots i_s} - \ell_s)\, P_{j_1 \dots j_s}\, g^{i_1 j_1} \cdots g^{i_s j_s} = 0\,,$$

da cui si ottiene

$$\ell_s = \frac{X_{i_1 \dots i_s}\, P^{i_1 \dots i_s}}{P^{i_1 \dots i_s}}\,;$$

essendo l'invariante:

$$X_{i_1 \dots i_s}\, p^{i_1 \dots i_s} = X^{i_1 \dots i_s}\, P_{i_1 \dots i_s}$$

il prodotto scalare delle due s-faccette dei tensori rispettivamente dei termini $X_{i_1 \dots i_s}$ e dei pesi $P_{j_1 \dots j_s}$.

In particolare, per $s = 2$ si hanno le formule delle medie tensoriali doppie:

$$(X^{ij} - \lambda_2)\, P^{ht}\, g_{ih}\, g_{jt} = (X^{ij} - \lambda_2)\, P^t_i\, g_{jt} = (X^{ij} - \lambda_2)\, P_{ij} = 0\,,$$

da cui si ricava la media aritmetica ponderata controvariante di ordine 2:

$$\lambda_2 = \frac{X^{ij}\, P_{ij}}{P_{ij}}\,.$$

Analogamente si può ricavare la formula della media aritmetica ponderata covariante del secondo ordine:

$$\ell_2 = \frac{X_{ij}\, P^{ij}}{P^{ij}}\,.$$

Con riferimento alle medie doppie, sono possibili numerose applicazioni, tra cui quella della media o sintesi dei coefficienti di correlazione binaria al fine di ottenere un indicatore statistico globale della correlazione esistente tra n variabili (Volpe di Prignano, 1970).

13. Confronto tra medie tensoriali

Il tema del confronto tra due medie tensoriali è una questione di metrica, ossia di distanza tra punti le cui coordinate omogenee sono le determinazioni empiriche delle variabili statistiche. L'idea del confronto tra medie comuni non ha mai entusiasmato gli statistici, e ciò a causa soprattutto della precarietà di tale raffronto. Se si tratta invece del confronto tra medie tensoriali, confronto inteso come distanza tra punti o insiemi di punti, ovvero come misura di dissomiglianza tra unità statistiche con riferimento a una sequela di caratteri, allora il principio del semplice paragone tra medie tensoriali in generale acquista una importanza notevole specie nelle ricerche di *clustering* (Brambilla, 1982; Maisano, 1981).

Circa il problema fondamentale della *cluster analysis*, che è quello classificatorio, ogni individuo in senso lato si può classificarlo grazie a una specifica media tensoriale semplice o ponderata. La dissomiglianza o somiglianza tra individui dipende dalla maggiore o minore distanza (Leti, 1961; 1980).

Un approccio analogo lo si ritrova, grazie alla distanza di Mahalanobis (1936) nella quale si tiene conto, a differenza della distanza euclidea, delle correlazioni statistiche esistenti tra le possibili coppie di variabili. È chiaro che anche qui ci si potrebbe chiedere se la metrica di Mahalanobis non sarebbe a sua volta un caso particolare di un approccio più generale come quello tensoriale. In altri termini sarebbe il caso di parlare di una generalizzazione della distanza generalizzata del Mahalanobis.

Sento il preciso dovere di ringraziare il carissimo Maestro e amico prof. Giuseppe Palomba per i suggerimenti e le indicazioni che sono stati certamente utili ai fini della stesura di questo lavoro.

Riferimenti bibliografici

V. Amato, *Statistica*, Cacucci, Bari, 1977.
F. Brambilla, Analisi statistica dei bilanci di 750 aziende italiane per il 1976, *Giornale degli Economisti*, 1982.
C. Cattaneo, *Introduzione alla teoria einsteiniana della gravitazione*, V. Veschi, 1960.
A. Comessatti, *Lezioni di geometria analitica e proiettiva*, Cedam, Padova, 1930.
B. Finzi e M. Pastori, *Calcolo tensoriale e applicazioni*, Zanichelli, Bologna, 1961.
P. Franklin, *Differential and Integral Calculus*, McGraw-Hill, London, 1953.
G. Leti, Nuovi tipi di distanza tra insiemi di punti e loro applicazione alla statistica, *Metron*, 1961.
G. Leti, Punti aventi come coordinate le determinazioni di variabili correlate, *Studi in onore di G. de Meo*, 1980.
T. Levi-Civita, *Lezioni di calcolo differenziale assoluto*, A. Stock, Roma, 1925.
A. Linchnerowicz, *Elements de calcul tensoriel*, A. Colin, Paris, 1958.
P.C. Mahalanobis, On the generalized distance, *Proc. of the Nat. Inst. of Sciences of India*, vol. II, 1936.
S. Maisano, Metrica per graduatorie e analisi tassonomica, *Quaderni dell'Istituto di statistica*, Università di Messina, n. 1, 1981.
G. Palomba, *Fisica economica*, UTET, Torino, 1970.
B. Spain, *Tensor Calculus*, Oliver and Boyd, 1965.
E. Volpe di Prignano, Un problema di media di coefficienti di correlazione, *Statistica*, n. 1, 1970.

Summary

In this paper we wish to introduce a fundamental concept with reference to the means theory: the tensorial mean. In the general coordinates we can see that there are two means; that is to say, a dichotomy in the field of the weighted arithmetic mean is present. We may distinguish the covariant mean, weighted by quantities belonging to controvariant system, and vice versa.

The problem may be generalized with reference to the tensor mean. For the weighted arithmetic means of order s, there is the same dichotomy: the covariant and controvariant weighted mean. In this analysis is very important the idea relating to the difference or distance between two tensor means as a valid measure of dissimilarity or points in which two unities differ with reference to a set of variables: this is the well known problem of cluster analysis as a technique of classification. In fact, the clustering problem consists in finding and ordering group of objects using the variables which characterize these objects.

We then show that the distance between two means can be used as a possible criterion of classification.