Rivista di Statistica Applicata, Vol. 17, N. 1 (Marzo) 1984

Osservazioni sulla verifica delle ipotesi funzionali con parametri stimati

Note e Discussioni

Laura Carbognin, CNR, Istituto per lo studio della Dinamica delle Grandi Masse, Venezia
Giancarlo Taroni, Amministrazione Provinciale, Venezia

In un precedente studio, pubblicato da questa Rivista (1983), si era affrontato il problema della verifica statistica delle ipotesi funzionali in presenza di parametri stimati all'ennupla campionaria.
Questa nota precisa e modifica la precedente per renderla propriamente adatta alla soluzione dei problemi delineati.

1. Introduzione

Si considera il sistema di ipotesi:

$$H_0 : F(X, \Theta) = F_0(X, \Theta) \text{ contro } H_1 : F(X, \Theta) \neq F_0(X, \Theta) \quad (1.1)$$

dove $F(X, \Theta)$ è la funzione di ripartizione (*fr*) della variabile casuale continua (*vc*) X dalla quale sono tratte le N determinazioni campionarie $x_1, \ldots, x_N$. Nel caso in questione H_0 specifica solo il tipo di *vc* senza indicarne in alcun modo i parametri Θ necessari a individuare la *fr*, che devono essere così stimati dal campione. Nella trattazione che segue si fa costante riferimento solo a *vc* caratterizzate da due parametri, di scala e locazione.

Se i parametri sono stimati dal campione, tramite gli stimatori $N\Theta$ di Θ, in generale le N trasformazioni campionarie

$$y_i = F_0(x_i; N\Theta) \quad (1.2)$$

sono funzionalmente dipendenti con Jacobiano nullo nel punto $x_1, \ldots, x_N$.

Inoltre, il generico elemento y ottenuto dalla trasformazione (1.2) descrive una *vc* non equidensa in $[0, 1)$. Ne consegue che quasi tutti i test funzionali esistenti in letteratura non sono direttamente applicabili sugli N valori y, a meno di ricorrere ad appropriate tabulazioni dipendenti in generale da N, dalla varità funzionale considerata, e dal criterio con il quale si stimano i parametri.

La procedura proposta consente di usare un qualsiasi test funzionale su una nuova ennupla campionaria di n' elementi w a componenti indipendenti tali che, se è vera H_0, può pensarsi praticamente tratta da una *vc* W equidistribuita in $[0, 1)$.

2. Il metodo

Si suddivida l'intervallo $[0, 1)$ in $m > 2$ intervalli del tipo:

$$I_j = [(j - 1)/m, j/m) \tag{2.1}$$

e si ponga, fissato n:

$$p_j = \int_{I_j} G(Y)\, dY \tag{2.2}$$

dove $G(.)$ è la densità associata alla trasformazione

$$Y = F(X, n\Theta) \tag{2.3}$$

generata da un campione $x_1, \ldots, x_n$ di n elementi a componenti indipendenti tratto dalla *vc* X con *fr* $F(X; \Theta)$, e $n\Theta$ è una stima opportuna di Θ ottenuta dal campione x.

La procedura consiste nel trasformare le n determinazioni

$$y_i = F(x_i; n\Theta)\,, \quad n = 1, \ldots, n \tag{2.4}$$

in una determinazione w tratta da una equidensa W in $[0, 1)$.

Per ottenere, ogni n informazioni campionarie indipendenti, una nuova determinazione w, si scelga a caso un indice i', assegnando ad ogni intero tra 1 e n la medesima probabilità, e si associ la quantità

$$w = hp_i + \Sigma_{j=1}^{i-1} p_j \quad \text{se} \quad y_{i'} \in I_i \tag{2.5}$$

dove h è una determinazione ausiliaria tratta da una equidensa H in $[0, 1)$.

Disponendo di n' ennuple campionarie indipendenti di numerosità n si ottiene il nuovo campione w che può pensarsi tratto, se è vera l'ipotesi nulla, alla *vc* W equidistribuita tra $[0, 1)$.

Le componenti del nuovo campione w sono indipendenti in forza della indipendenza delle n' ennuple campionarie di numerosità n sulle quali si è calcolata la (2.5).

Nel caso considerato il più piccolo valore di n è pari a 3 in quanto i parametri da stimare sono due, la locazione e la scala.

L'originale sistema di ipotesi (1.1) è trasformato nel seguente:

$$H_0 : F(W) = W \text{ contro } H_1 : F(W \neq W, \text{ con } W \in [0, 1) \tag{2.6}$$

che può essere verificato con un comune test funzionale.

3. Conclusioni

Con le modifiche qui apportate rispetto alla procedura precedentemente indicata (Taroni G., Carbognin L., 1983), il campione w è a componenti stocasticamente indipendenti, cosa che non avveniva con la versione precedente.

Il vantaggio di questa procedura, dispersiva nella numerosità campionaria, rispetto ad altri test analoghi è quello di permettere le verifiche indicate con i comuni test funzionali noti in letteratura.

Inoltre, se si conduce la verifica con il criterio di F.N. David (1950) sul campione w, il test conclusivo gode della proprietà della correttezza statistica, elemento di difficile dimostrazione per le altre procedure.

Riferimenti bibliografici

David F.N., Two combinatorial tests of whether a sample as come from a given population. *Biometrika,* (1950).

Taroni G. e Carbognin L., Verifica statistica di ipotesi funzionali con parametri stimati e applicazione agli eventi delle acque alte a Venezia. *Rivista di statistica Applicata,* **16**, n. 3, 1983.