Rivista di Statistica Applicata, Vol. 18, N. 3 (Settembre) 1985

Un secondo indice di concentrazione basato sui rapporti fra quantili di reddito e quantili di popolazione

Michele Zenga, Istituto Marcello Boldrini, Università di Milano.

1. Introduzione

In recenti pubblicazioni M. Zenga si è interessato sia di chiarire taluni aspetti legati alle situazioni estreme di concentrazione nel caso di variabili casuali (v.c.) continue (1984 *a*), sia di proporre una misura puntuale di concentrazione data da $Z_p = 1 - x_p/x_p^*$ essendo: $x_p = F^{-1}(p)$ l'inversa della funzione di ripartizione e $x_p^* = Q^{-1}(p)$ l'inversa del primo momento incompleto (1984 *b*). Inoltre, per misurare il grado medio di concentrazione ha proposto (1984 *b*) l'indice ζ definito dal complemento ad 1 della media aritmetica dei rapporti $R_p = x_p/x_p^*$. Nel caso della distribuzione log-normale i rapporti R_p non variano al variare di p e ζ può essere inteso, oltre che come indice medio di concentrazione, anche come indice descrittivo di concentrazione nel senso di C. Gini.

L'indice ζ, messo a confronto con il rapporto di concentrazione R, è risultato più « sensibile » di quest'ultimo per quella gamma di valori che più frequentemente si riscontrano nella realtà.

In questa memoria si propone un nuovo indice ζ_2 dato dal complemento ad 1 della media geometrica dei rapporti R_p.

Il passaggio alla media geometrica dei rapporti, facilita il calcolo dell'indice, nel caso in cui non si sia interessati a valutazioni puntuali di concentrazione.

A. Pollastri (1985) ha individuato un insospettabile collegamento fra l'indice ζ_2 e le misure di disuguaglianza T_1 e T_2 di Theil, ha dimostrato che l'indice gode delle tradizionali proprietà richieste ad un indice di concentrazione ed ha anche proposto una scomposizione dello stesso.

2. Definizioni e simbologia

L'indice è ricavato assumendo dapprima che la grandezza di cui si vuol misurare la concentrazione possa essere rappresentata da una v.c. X continua e non negativa. Successivamente lo stesso viene ricavato ipotizzando di disporre di N osservazioni $x_1, x_2, \ldots, x_N$ della grandezza in oggetto.

Sia dunque X una v.c. continua e non negativa dotata di densità di probabilità $f(x)$ e di aspettativa $E(X) = \mu$ finita.

In questo tipo di studi rivestono una importanza fondamentale:

— la funzione di ripartizione (che si suppone crescente)

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt\,, \tag{1.1}$$

— il primo momento incompleto

$$Q(x) = \int_0^x t \cdot f(t)\, dt/\mu\,. \tag{1.2}$$

Si indichi l'inversa della funzione $F(x)$ con $x_p = F^{-1}(p)$ e l'inversa della funzione $Q(x)$ con $x_p^* = Q^{-1}(p)$, essendo $0 \leq p \leq 1$.

Per C. Gini (1914) la concentrazione relativa, in corrispondenza della quota cumulata di popolazione p, è tanto più elevata quanto più è elevato il rapporto $\{p - Q(x_p)\}/p$. Altrettanto logicamente si può ritenere (M. Zenga, 1984 *b*) che in corrispondenza di p la concentrazione relativa sia tanto più elevata quanto più è elevato il rapporto $Z_p = \{x_p^* - x_p\}/x_p^* = 1 - R(p)$.

Da quanto ora esposto scaturisce che, dal punto di vista formale, la concentrazione si può configurare come un problema di confronto fra $F(x)$ *e* $Q(x)$, *ovvero fra le loro inverse* x_p *e* x_p^*, *essendo noto che* $F(x) \geq Q(x)$ *e che* $x_p^* \geq x_p$.

Il confronto può essere condotto in vari modi e può essere sia di tipo *puntuale* (per ogni p) sia di tipo *medio*. Per valutare la concentrazione media C. Gini (1914) propose di calcolare la media ponderata dei rapporti $\{p - Q(x_p)\}/p$ con pesi p, ottenendo il rapporto di concentrazione R. In questa nota si propone un nuovo indice di concentrazione dato dal complemento ad 1 della media geometrica dei rapporti R_p.

3. L'indice di concentrazione

Si propone l'indice di concentrazione

$$\zeta_2 = 1 - M_0\,(R_p) = 1 - e^{E\,(\log R_p)}\,, \tag{3.1}$$

essendo $M_0\,(\bullet)$ l'operatore media geometrica, e

$$E\,(\log R_p) = \int_0^1 \log \frac{F^{-1}(p)}{Q^{-1}(p)}\, dp\,. \tag{3.2}$$

Ponendo nella (3.2) $p = F(x)$ si ha

$$E\,(\log R_p) = \int_0^\infty \log \frac{x}{Q^{-1}(F(x))}\, d\,F(x) = \log M_0 \left(\frac{x}{Q^{-1}(F(x))} \rightarrow F(x) \right), \quad (3.3)$$

ove con $M_0 \left(\frac{x}{Q^{-1}(F(x))} \rightarrow F(x) \right)$ si indica la media geometrica dei rapporti $\frac{x}{Q^{-1}(F(x))}$ rispetto a $F(x)$.

La (3.3) può anche scriversi come segue

$$E\,(\log R_p) = \log \frac{M_0\,(x \rightarrow F(x))}{M_0\,(Q^{-1}(F(x)) \rightarrow F(x))}. \quad (3.4)$$

Dalla (3.3) e dalla (3.4) si desume che ζ_2 può essere espresso come segue:

$$\zeta_2 = 1 - M_0 \left(\frac{x}{Q^{-1}(F(x))} \rightarrow F(x) \right), \quad (3.5)$$

$$= 1 - \frac{M_0\,(x \rightarrow F(x))}{M_0\,(Q^{-1}(F(x)) \rightarrow F(x))}. \quad (3.6)$$

Ponendo nella (3.2) $p = Q(x)$, l'indice ζ_2 diviene:

$$\zeta_2 = 1 - M_0 \left(\frac{F^{-1}(Q(x))}{x} \rightarrow Q(x) \right), \quad (3.7)$$

$$= 1 - \frac{M_0\,(F^{-1}(Q(x)) \rightarrow Q(x))}{M_0\,(x \rightarrow Q(x))}. \quad (3.8)$$

Se non si è interessati al calcolo dei rapporti $\frac{x}{Q^{-1}(F(x))}$, ovvero dei rapporti $\frac{F^{-1}(Q(x))}{x}$, ma solo al valore dell'indice, si può evitare l'impiego delle funzioni inverse. Tenendo presente che $\log M_0 (F^{-1}(Q(x)) \rightarrow Q(x)) = \log M_0\,(x \rightarrow F(x))$, dalla (3.8) si ha

$$\zeta_2 = 1 - \frac{M_0\,(x \rightarrow F(x))}{M_0\,(x \rightarrow Q(x))}, \quad (3.9)$$

$$= 1 - e^{\int_0^\infty \log(x) \cdot f(x)\,dx - \int_0^\infty \frac{x}{\mu} \log(x) \cdot f(x)\,dx} \quad (3.10)$$

4. Procedimenti per il calcolo dell'indice ζ_2

Si espongono ora tre procedimenti per il calcolo dell'indice qui proposto nel caso in cui si disponga di una serie ordinata di valori $x_1, x_2, \ldots, x_N$ con $x_1 \geq 0$ e $x_N > 0$.

Per esemplificare si supponga di avere la serie dei 10 valori riportati nel prospetto che segue nel quale sono altresì indicati i valori delle frequenze relative (semplici) $\hat{p}(x_i) = \dfrac{1}{N}$ e cumulate $\hat{F}(x_i) = \dfrac{i}{N}$, nonché le quote (semplici) $\hat{q}(x_i) = x_i/N\bar{x}$ del carattere e quelle cumulate $\hat{Q}(x_i) = \Sigma_{j=1}^{i}\hat{q}(x_j)$; con $\bar{x}$ si è indicata la media aritmetica dei valori.

Tab. I - Frequenze relative semplici e cumulate e quote semplici e cumulate.

i	x_i	$p(x_i)$	$F(x_i)$	$q(x_i)$	$Q(x_i)$
1	1,0	0,10	0,10	0,01	0,01
2	2,0	0,10	0,20	0,02	0,03
3	3,0	0,10	0,30	0,03	0,06
4	4,0	0,10	0,40	0,04	0,10
5	6,0	0,10	0,50	0,06	0,16
6	9,0	0,10	0,60	0,09	0,25
7	13,0	0,10	0,70	0,13	0,38
8	16,0	0,10	0,80	0,16	0,54
9	20,0	0,10	0,90	0,20	0,74
10	26,0	0,10	1,00	0,26	1,00
	100,0	1,00		1,00	

Si riportino ora su un piano cartesiano ortogonale i punti (◦) di ascissa $\hat{F}(x_i)$ ed ordinata x_i, nonché i punti (+) di ascissa $\hat{Q}(x_i)$ ed ordinata x_i. I punti (◦) giacciono sulla « curva di graduazione delle x_i rispetto a $\hat{F}(x_i)$ », mentre i punti (+) giacciono sulla « curva di graduazione delle x_i rispetto a $\hat{Q}(x_i)$ ». Le due curve di graduazione ora introdotte si ottengono unendo con un curvilineo i punti (◦) ed i punti (+), avendosi rispettivamente:

a) la curva di graduazione rispetto a $\hat{F}(x_i)$ le cui ordinate sono $\hat{x}_p = \hat{F}^{-1}(p)$, che per $p = \hat{F}(x_i)$ risultano pari a x_i;
b) la curva di graduazione rispetto a $\hat{Q}(x_i)$ le cui ordinate sono $\hat{x}_p^* = \hat{Q}^{-1}(p)$, che per $p = \hat{Q}(x_i)$ risultano pari a x_i.

Nel caso di una serie di valori sembra ragionevole sostituire $\log M_0\,(x \rightarrow F(x))$ con $(\Sigma \log x_i)/N$ e $\log M_0\,(Q^{-1}(F(x)) \rightarrow F(x))$ con $\left(\Sigma_1^N \log Q^{-1}\left(\dfrac{i}{N}\right)\right)/N$, avendo per semplicità posto $\hat{Q}^{-1}(F(x_i)) = \hat{Q}^{-1}\left(\dfrac{i}{N}\right)$.

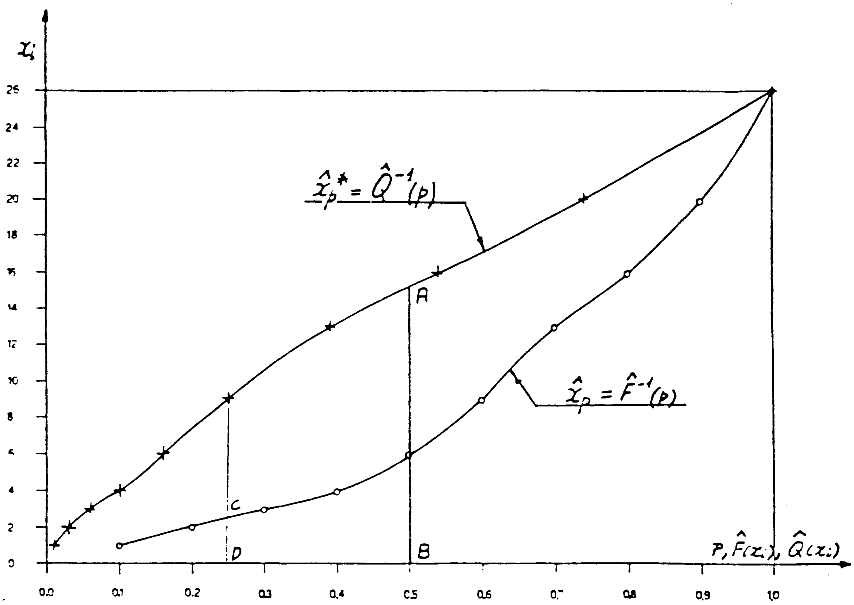

Fig. 1 - Curva di graduazione rispetto a $F(x_i)$ e curva di graduazione rispetto a $Q(x_i)$.

Si tenga presente che i valori $\hat{Q}^{-1}\left(\frac{i}{N}\right)$ devono essere ricavati con procedimento interpolatorio sulla curva di graduazione $\hat{x}_p^* = \hat{Q}^{-1}(p)$. Nella Figura 1 il segmento AB indica $\hat{x}_{0,5}^* = \hat{Q}^{-1}(0,5)$.

L'indice ζ_2, nella versione della formula (3.6), si calcola con

$$ {}_aZ_2 = 1 - \Pi\left(x_i/Q^{-1}\left(\frac{i}{N}\right)\right)^{\frac{1}{N}} \quad . \tag{4.1} $$

I rapporti $x_i/\hat{Q}^{-1}\left(\frac{i}{N}\right)$ permettono sia di valutare le concentrazioni puntuali ${}_aZ\left(\frac{i}{N}\right) = 1 - x_i/\hat{Q}^{-1}\left(\frac{i}{N}\right)$ sia di calcolare la concentrazione media con la (4.1). Sfortunatamente per il loro impiego bisogna fare delle ipotesi sulla funzione da impiegare per ricavare con l'interpolazione i valori $\hat{Q}^{-1}\left(\frac{i}{N}\right)$.

È possibile valutare l'indice ζ_2 anche adattando le formule (3.7) e (3.8) con le seguenti sostituzioni:

$M_0\,(x \rightarrow Q(x))$ con $M_0\,(x \rightarrow \hat{Q}(x_i)) = \Pi_1^N\, x_i^{\hat{q}(x_i)}$

e

$M_0\,(F^{-1}(Q(x)) \rightarrow Q(x))$ con

$$M_0\,(\hat{F}^{-1}(\hat{Q}(x_i)) \rightarrow \hat{Q}(x_i)) = \Pi_1^N \{\hat{F}^{-1}(\hat{Q}(x_i))\}^{\hat{q}(x_i)},$$

ove $\hat{F}^{-1}(\hat{Q}(x_i))$ deve essere ricavato interpolando sulla curva di graduazione $\hat{x}_p = \hat{F}^{-1}(p)$. Nella Figura 1 il segmento CD indica $\hat{F}^{-1}(\hat{Q}(x_i)) = \hat{F}^{-1}(0.25)$.

L'indice ζ_2, nella versione della formula (3.7), si calcola con

$$_bZ_2 = 1 - \Pi\ (\hat{F}^{-1}(\hat{Q}(x_i))/x_i)^{\hat{q}(x_i)}\,. \tag{4.2}$$

Se non si è interessati ad avere informazioni sulle concentrazioni puntuali — ottenibili dai rapporti $x_i/\hat{Q}^{-1}\left(\frac{i}{N}\right)$ ovvero dai rapporti $\hat{F}^{-1}(\hat{Q}(x_i))/x_i$ — si può ricavare la concentrazione media estendendo la (3.9) dal continuo al discreto, evitando in tal modo il ricorso alle interpolazioni che implicano sempre un margine di arbitrio. Sostituendo $M_0\,(x \rightarrow F(x))$ con $M_0\,(x \rightarrow \hat{F}(x_i)) = \Pi\, x_i^{1/N}$ e $M_0\,(x \rightarrow Q(x))$ con $M_0\,(x \rightarrow \hat{Q}(x_i)) = \Pi_1^N\, x_i^{\hat{q}(x_i)}$, l'indice ζ_2 nella versione della formula (3.9), può essere calcolato con

$$Z_2 = 1 - \Pi_{i=1}^N x_i^{\left(\frac{1}{N} - \hat{q}(x_i)\right)}. \tag{4.3}$$

Tenendo presente che $\hat{q}(x_i) = x_i/N\bar{x}$, la (4.3) può anche esprimersi come segue

$$Z_2 = 1 - \Pi_{i=1}^N q_i^{\frac{1}{N} - q_i}, \tag{4.4}$$

ove per brevità, si è indicato $\hat{q}(x_i)$ con q_i. Nel caso in cui si sia in presenza di una distribuzione di frequenza (x_i, n_i; $i = 1, 2, \ldots, K$; $\Sigma_{i=1}^K n_i = N$) l'indice Z_2 diventa

$$Z_2 = 1 - \Pi_1^K x_i^{\frac{n_i}{N}\left(1 - \frac{x_i}{\bar{x}}\right)}, \tag{4.5}$$

essendo $\bar{x}$ la media aritmetica ponderata della distribuzione di frequenza.

5. Relazione fra ζ_2 e le misure di disuguaglianza T_1 e T_2 di Theil

H. Theil per misurare la diseguaglianza dei redditi ha proposto due indici (1967, pag. 96, 126) T_1 e T_2 che nel caso di v.c. continue assumono la forma:

$$T_2 = \int_0^\infty log \frac{\mu}{x} f(x)\,dx = log\,\mu - log\,M_0\,(x \rightarrow F(x))\,;$$

$$T_1 = \int_0^\infty \frac{x}{\mu}\, log \frac{x}{\mu} \cdot f(x)\,dx = log\,M_0\,(x \rightarrow Q(x)) - log\,\mu\,.$$

H. Theil ha derivato i suoi indici dalla « teoria dell'informazione ». Una caratteristica apprezzata di T_1 e T_2 è quella della loro scomponibilità « additiva ». Sfortunatamente i due indici non sono compresi fra 0 e 1 e quindi non sono direttamente confrontabili con gli indici che per « costruzione » devono essere compresi in tale intervallo.

Questo aspetto viene spesso trascurato e Theil stesso non si avvede di ciò quando confronta direttamente i suoi indici con il rapporto di concentrazione R (1967, pag. 121). L'equivoco nasce anche dal fatto che nelle applicazioni pratiche gli indici di Theil risultano quasi sempre compresi fra 0 e 1.

Si mostra ora che l'indice ζ_2 (compreso fra 0 e 1) è legato funzionalmente alla somma $T_1 + T_2$. Infatti, essendo $T_1 + T_2 = log\,M_0(x \rightarrow Q(x)) - $ $- log\,M_0\,(x \rightarrow F(x)) = - log \dfrac{M_0\,(x \rightarrow F(x))}{M_0\,(x \rightarrow Q(x))}$, consegue, in forza della (3.9), che:

$$\zeta_2 = 1 - e^{-(T_1+T_2)}\,. \tag{5.1}$$

La relazione (5.1) è stata individuata da A. Pollastri (1985) che nell'ambito del gruppo di ricerca per lo studio degli indici ζ e ζ_2 si è dedicata all'analisi delle proprietà di ζ_2. Va da sé che la relazione (5.1) è valida anche per Z_2.

6. Alcune proprietà dell'indice proposto

Si riportano ora alcune proprietà dell'indice proposto, analizzate come si accennava prima da A. Pollastri (1985).

I *Valore dell'indice in presenza delle situazioni estreme di concentrazione.*

È opportuno distinguere il caso delle v.c. continue dal caso del calcolo dell'indice in presenza di N valori $x_1, x_2, \ldots, x_N$.

Nel caso di v.c. continue si è analizzato il comportamento di ζ_2 al variare dei parametri di alcune v.c. (log-normale, Pareto, esponenziale e rettangolare). Si è riscontrato che:

a) al variare dei parametri in modo che si tenda alla massima concentrazione (M. Zenga, 1984 *a*) il valore di ζ_2 tende ad 1;
b) al variare dei parametri in modo che si tenda alla concentrazione nulla (M. Zenga, 1984 *a*) il valore di ζ_2 tende a 0.

In presenza di N valori $x_1, x_2, \ldots, x_N$ il valore di Z_2 si annulla se gli stessi sono fra loro uguali. Inoltre, se $x_i = 0$ per $i = 1, 2, \ldots, N - 1$ e $x_N > 0$ si può porre $Z_2 = 1$. Data la presenza della media geometrica delle x_i nell'espressione di Z_2 è comunque sconsigliabile calcolare l'indice se qualche $x_i = 0$.

II. L'indice Z_2 è sensibile ai trasferimenti nell'accezione di Dalton-Bonferroni.

III. L'indice è un numero puro senza dimensione fisica.

IV. L'indice è invariante rispetto alle trasformazioni di scala. Nel caso di ζ_2 si tenga presente che i rapporti x_p / x_p^* sono invarianti rispetto alle trasformazioni di scala (M. Zenga, 1984 *a*).

V. L'indice Z_2 soddisfa il principio della somiglianza.

VI. L'indice Z_2 soddisfa il principio delle equiaggiunte.

7. Scomponibilità di Z_2

A. Pollastri (1985) ha proposto per Z_2 la scomposizione che segue. Si supponga che ciascuno degli N valori appartenga ad uno dei G gruppi $S_1, S_2, \ldots, S_G$. Si supponga altresì che S_g consista di N_g valori ($\Sigma N_g = N$) e si indichino con P_g e Q_g rispettivamente la quota di popolazione e la quota del carattere totale $(x_1 + \ldots + x_N)$ spettante a S_g:

$$P_g = N_g / N, \qquad g = 1, 2, \ldots, G \tag{7.1}$$

$$Q_g = \frac{N_g \cdot \overline{X}_g}{N \cdot \overline{X}}, \qquad g = 1, 2, \ldots, G \tag{7.2}$$

con $\overline{X}_g$ si è indicata la media aritmetica dei valori appartenenti a S_g. Si indichi altresì con $\hat{X}_g$ la media geometrica dei valori appartenenti a S_g e con $\breve{X}_g$ la media entropica (Jalla, 1978 e 1980) degli stessi valori.

Si indichi inoltre con M_g la media geometrica fra $\hat{X}_g$ e $\breve{X}_g$. Con Z_{2g} si indica il valore dell'indice calcolato sui valori appartenenti a S_g. Si indichi con Z_{2F} il valore dell'indice calcolato sulla distribuzione di frequenza costituita dalle medie aritmetiche $\overline{X}_g$ e dalle numerosità N_g dei gruppi, in altre parole

$$Z_{2F} = 1 - \Pi_1^G \overline{X}_g^{P_g - Q_g} . \tag{7.3}$$

L'indice Z_2 è dato da:

$$Z_2 = 1 - \Pi_{g=1}^G (1 - Z_{2g})^{\frac{P_g+Q_g}{2}} \left(\frac{M_g}{\overline{X}_g} \right)^{P_g - Q_g} \Pi_1^G \overline{X}_g^{P_g - Q_g} . \tag{7.4}$$

Seguendo la terminologia di Bonferroni (1941, pag. 59) si può chiamare indice di uniformità il complemento ad 1 di un indice di concentrazione. Pertanto l'indice di uniformità totale $U = 1 - Z_2$ risulta dato da

$$U = \left\{ \Pi_{g=1}^G U_g^{\frac{P_g+Q_g}{2}} \left(\frac{M_g}{\overline{X}_g} \right)^{P_g - Q_g} \right\} U_F \tag{7.5}$$

in cui con U_F si è indicato l'indice di uniformità fra i gruppi.

Il valore della produttoria $\Pi_{g=1}^G U_g^{\frac{P_g+Q_g}{2}} \left(\frac{M_g}{\overline{X}_g} \right)^{P_g - Q_g}$, compreso fra 0 e 1 (Pollastri, 1985), dipende dalle uniformità esistenti nei singoli gruppi nonché dai valori di $\left(\frac{M_g}{\overline{X}_g} \right)^{P_g - Q_g}$ che dipendono sempre dai valori appartenenti ai singoli gruppi. Si può indicare tale produttoria con U_N (uniformità nei gruppi). In definitiva, l'uniformità totale è data dal prodotto della uniformità nei gruppi per quella fra i gruppi:

$$U = U_N \cdot U_F . \tag{7.6}$$

Si ha così per il complemento ad 1 dell'indice Z_2 una scomponibilità moltiplicativa.

L'apporto (moltiplicativo) del gruppo S_g alla uniformità totale è dato da

$$U_g^{\frac{P_g+Q_g}{2}} \left(\frac{M_g}{\overline{X}_g} \right)^{P_g - Q_g} = \left(\frac{\overline{X}_g}{\overline{\overline{X}}_g} \right)^{Q_g} \cdot \left(\frac{\hat{X}_g}{\overline{X}_g} \right)^{P_g} .$$

8. Conclusioni

In questa memoria si è configurata la concentrazione come un problema di *confronto* fra due distribuzioni aventi lo stesso « supporto » ed aventi funzioni di ripartizione $F(x)$ e $Q(x)$ con $F(x) \geq Q(x)$. Il confronto può essere di *tipo puntuale* o di *tipo medio*.

Per il confronto di tipo puntuale si è proposto (M. Zenga, 1984 *b*) il complemento ad 1 dei rapporti R_p, che è stato indicato con Z_p. In precedenti lavori (M. Zenga, 1985 *a*) si è già mostrata sia l'utilità dei rapporti $R_p = x_p/x_p^*$ per lo studio delle situazioni di concentrazioni estreme nelle v.c. continue, sia l'andamento di Z_p al variare di p per alcune variabili casuali. In particolare, si è mostrato che, per la distribuzione log-normale il rapporto Z_p è costante al variare di p ed è uguale a $\eta^2/(\eta^2+1)$, essendo η^2 il coefficiente di variazione della distribuzione log-normale.

A. Brunazzo (1985) ha esaminato le variazioni che subisce Z_p a seguito di opportune trasformazioni della variabile X. In particolare A. Brunazzo ha dimostrato che se:

$$Y = g(X)\,, \quad \text{con} \quad g(0) \geq 0\,, \quad g'(x) > 0 \quad \text{e} \quad g''(x) < 0$$

allora $x_p/x_p^* < y_p/y_p^*$. In altre parole, a seguito di trasformazioni del tipo sopra indicate, la concentrazione puntuale in corrispondenza della quota cumulata p diminuisce.

Se si indica con X il reddito imponibile e con Y il reddito netto dopo la tassazione fra Y e X intercorre solitamente una relazione del tipo sopra indicata (A. Brunazzo, 1985), per cui a seguito della tassazione le misure puntuali di concentrazione diminuiscono evidenziando così l'effetto perequativo della tassazione.

Anche per confronti di *tipo medio* è possibile impiegare i rapporti R_p. In un precedente lavoro (M. Zenga, 1984 *a*) si è proposto l'indice ζ basato sul complemento ad 1 della media aritmetica dei rapporti R_p.

In questa sede si è proposto invece l'indice ζ_2 dato dal complemento ad 1 della media geometrica dei rapporti R_p. Per il calcolo di questo indice si sono indicati tre procedimenti. Due di essi permettono di avere anche informazioni sulla concentrazione « puntuale », ma necessitano di un procedimento interpolatorio sulle curve di graduazione. Il terzo procedimento fornisce invece solo la concentrazione media che è data da

$$\zeta_2 = 1 - \frac{M_0\,(x \rightarrow F(x))}{M_0\,(x \rightarrow Q(x))}\,.$$

Nel caso di una successione di N valori l'indice assume l'espressione

$$Z_2 = 1 - \Pi_{i=1}^{N} x_i^{\frac{1}{N} - \frac{x_i}{\bar{x}}}\,.$$

A. Pollastri (1985) ha mostrato che:

1) ζ_2 è legato funzionalmente alle due misure di disuguaglianza T_1 e T_2 di H. Theil;
2) ζ_2 gode delle tradizionali proprietà richieste ad un indice di concentrazione;

3) $1 - \zeta_2$ gode di una scomponibilità moltiplicativa.

La necessità di conoscere sia x_p sia x_p^* per la determinazione dei rapporti R_p, e gli inevitabili arbitrii connessi con le interpolazioni sulle curve di graduazione, suggeriscono di chiedere agli enti preposti alla raccolta delle statistiche di base, necessarie al calcolo degli indici, di pubblicare oltre alle tradizionali distribuzioni di frequenze, anche i quantili x_p e x_p^* (per opportuni valori di p). La conoscenza diretta dei quantili x_p e x_p^* permetterebbe infatti di ricavare immediatamente i rapporti R_p nonché gli indici di concentrazione su di essi basati.

Infine preme rilevare che, nel caso in cui i rapporti R_p siano « praticamente costanti », è possibile interpretare sia l'indice ζ sia l'indice ζ_2 (o quant'altri basati su medie di R_p) oltre che come indici medi di concentrazione anche come indici descrittivi di concentrazione nel senso di C. Gini (1910).

Bibliografia

M. Zenga (1984 *a*), Tendenza alla massima ed alla minima concentrazione per variabili casuali continue, in *Statistica*, anno XXXVIII n. 4.

M. Zenga (1984 *b*), Proposta per un indice di concentrazione basato sui rapporti fra quantili di popolazione e quantili di reddito, in *Giornale degli Economisti ed Annali di Economia*, Maggio-Giugno 1984.

A. Pollastri (1985), *Caratteristiche dell'indice ζ_2 di M. Zenga*, in Pubblicazioni dell'Istituto di Statistica e Ricerca Operativa dell'Università di Trento, serie provvisoria (1985).

A. Brunazzo (1985), *Variazioni nel diagramma di concentrazione di M. Zenga*, in Pubblicazioni dell'Istituto di Statistica e Ricerca Operativa dell'Università di Trento (1985).

E. Jalla (1978), Entropia e curva di concentrazione, *Atti della XXIX Riunione della Società Italiana di Statistica*, Vol. II, 1978, pag. 137-148.

E. Jalla (1980), Ulteriori precisazioni sul confronto fra gli indici di concentrazione χ e R, *Atti della Riunione della Società Italiana di Statistica*, Vol. II, Trento 10-12 aprile 1980.

Corrado Gini (1910), *Indici di concentrazione e di dipendenza*, Biblioteca dell'economista, V serie, volume XX, Torino, Unione Tipografica Editrice.

Corrado Gini (1914), Sulla misura della concentrazione e della variabilità dei caratteri, *Atti del Reale Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti*; Tomo LXXIII, Parte seconda, a.a. 1913-14, pp. 1203-1248.

C.E. Bonferroni (1941), *Elementi di statistica generale* (ristampa con aggiunte), Litog. Eugenio Gili, Torino 1940-1941.

H. Theil (1967), *Economics and Information Theory*, Amsterdam, North-Holland, 1967.

Summary

In this paper we regard the concentration of a positive r.v. X as a problem of comparison between two distributions having the same « support » and having distribution functions $F(x)$ and $Q(x)$, with $F(x) \geq Q(x)$ and where $F(x)$ and $Q(x)$ are respectively the distribution function and the incomplete first moment of X. The comparison may be done by *point* measure or by *average* measure of concentration. These measures may be based on the functions $F(x)$ and $Q(x)$ directly or on their inverses $x_p = F^{-1}(p)$ and $x_p^* = Q^{-1}(p)$. The ratio $Z(p) = 1 - \dfrac{x_p}{x_p^*} = 1 - R_p$ can be employed to measure the point concentration ($0 \leq p \leq 1$). The index $\zeta = M_1(R_p)$ has already been proposed as average measure of concentration ($M_1(R_p)$ is the arithmetic mean of R_p). In this paper we propose the index $\zeta_2 = 1 - M_0(R_p)$ ($M_0(R_p)$ is the geometric mean of R_p). The geometric mean $M_0(R_p)$ makes the computation of the index easier. The index ζ_2 satisfies the traditional properties required for a concentration index. We show also an unexpected connection between the index ζ_2 and the two inequality measures proposed by Theil. Finally we propose a multiplicative decomposition of the complement to one of ζ_2.