

Decomposition of time series by dynamic linear models,

La scomposizione delle serie storiche tramite modelli dinamici lineari

Aride Mazzali, Istituto di Statistica, Facoltà di Economia e Commercio
– Università di Verona

L'articolo descrive un approccio adattativo alla scomposizione delle serie storiche stagionali, che appare utile quando la serie è di limitata estensione o non stazionaria nella varianza.

La rappresentazione della serie storica con un opportuno modello dinamico lineare gaussiano (DLMG) permette di ottenere le componenti trend, stagionalità ed errore come risultato naturale del procedimento iterativo di stima del vettore di stato tramite il filtro di Kalman. Quest'ultimo viene inserito nel contesto di una struttura di multiprocesso o nell'ambito dell'algoritmo di Sage-Husa, al fine di superare situazioni in cui le varianze dei disturbi casuali del modello sono incognite.

1. Introduzione

La scomposizione delle serie storiche economiche ed aziendali nelle componenti trend, stagionalità e residuo, è generalmente considerata operazione necessaria per una migliore comprensione della dinamica del fenomeno che la serie rappresenta. La stagionalità viene spesso considerata come elemento di disturbo che rende difficile la realizzazione di ulteriori ed approfondite analisi. È il caso, ad esempio, in cui si desidera valutare il tasso medio di incremento del fatturato di un prodotto di largo consumo in un predeterminato periodo di tempo e scomporlo nelle varie componenti imputabili alla lievitazione dei prezzi, all'incremento della popolazione, all'effetto delle azioni pubblicitarie e promozionali.

In altre circostanze possono essere le componenti stagionale e residua stesse oggetto di attenzione: ciò accade particolarmente in relazione alla programmazione di politiche di produzione e scorte, in cui è essenziale conoscere la dimensione e l'andamento del fenomeno stagionale, nonché l'entità della componente erratica.

La letteratura statistica in questi ultimi anni si è particolarmente arricchita di efficaci metodi e procedure di scomposizione, sia empiriche, come ad esempio il metodo *X-11* di J. Shiskin *et al.* (1976), il *SABL* di W. Cleveland *et al.* (1981), sia model-based.

I metodi di scomposizione model-based fanno riferimento ad un ben definito modello della serie storica ed affrontano il problema in modo razionale, in quanto consentono valutazioni probabilistiche dei risultati. Tra questi, particolarmente innovativo appare il metodo della scomposizione

canonica di Box–Hillmer–Tiao (1978), non solo per l'efficacia operativa, ma soprattutto in quanto realizza l'aggancio tra la modellistica ARIMA e la moderna teoria dell'estrazione del segnale.

La scomposizione canonica, essendo inscindibilmente legata alla modellistica ARIMA, presenta, in termini applicativi, almeno le stesse esigenze di quest'ultima, e cioè:

- è applicabile solo su serie sufficientemente lunghe (100–120 dati),
- richiede che le serie presentino una certa omogeneità di comportamento onde poterle ricondurre alla stazionarietà sia in media che nella varianza.

Questi limiti appaiono vincolanti particolarmente con riferimento alle serie economico-aziendali; in primo luogo perché l'operatore aziendale desidera avere informazioni sulle tendenze e sulla stagionalità già dopo i primi anni di rilevazione, e, in secondo luogo, perché le serie aziendali presentano spesso forme di non stazionarietà nella varianza non facilmente eliminabili.

D'altra parte, anche per molte serie economiche, come ad esempio quelle dei numeri indici dei prezzi, il limite dell'estensione della serie si pone in modo serio a motivo dei frequenti cambiamenti di base e dei panieri di riferimento.

Nel presente lavoro illustreremo in termini critici un metodo di scomposizione basato sui modelli dinamici lineari gaussiani (DLMG) in grado di superare in modo soddisfacente gli ostacoli precedentemente elencati. I modelli DLMG, pur con i loro limiti, si propongono come un utile strumento sia per la previsione, sia per la scomposizione di serie storiche che, presentando i citati caratteri di ridotta dimensione e non stazionarietà nella varianza, non possono essere trattate nell'ambito della moderna analisi delle serie storiche.

Nel contesto della modellistica DLMG la scomposizione trova soluzione in modo naturale in quanto le componenti che interessano sono elementi del vettore parametrico di stato che caratterizza il modello e, pertanto, la loro estrazione rientra nel processo iterativo di stima dello stato.

2. I modelli dinamici lineari gaussiani (DLMG)

La rappresentazione di una serie storica con modelli DLMG ha un significato sostanzialmente diverso da quello connesso alla rappresentazione ARIMA. I modelli DLMG, ignorando i concetti fondamentali di stazionarietà e di autocorrelazione, non possono spiegare i meccanismi interni generatori della serie storica, ma solo rappresentare gli aspetti esteriori della stessa, adattandosi al meglio alla sua dinamica. Essi, pertanto, non sono inseribili in una "teoria" delle serie storiche, ma semplicemente si propongono come uno strumento ausiliario nei casi in cui i primi non possono

essere usati.

Nella sua formulazione più generale, la famiglia dei modelli dinamici lineari gaussiani risulta definita da una coppia di equazioni: la prima, detta equazione di osservazione, esprime i valori della serie y_t come immagine di una trasformazione lineare del vettore parametrico θ_t ($p \times 1$), disturbata dalla v.c. v_t ; la seconda, detta equazione del sistema, descrive la dinamica markoviana di θ_t con matrice di transizione G ($p \times p$) e vettore stocastico di disturbo w_t ($p \times 1$).

Le due componenti di disturbo v_t e w_t sono distribuite in modo gaussiano con media nulla, varianze rispettivamente V_t e W_t , sono indipendenti tra di loro e dai loro valori passati. Si ha:

$$y_t = F_t \theta_t + v_t; \quad v_t \sim N(0, V_t) \tag{1}$$

$$\theta_t = G \theta_{t-1} + w_t; \quad w_t \sim N(0, W_t) \tag{2}$$

Le equazioni scritte possono rappresentare una gran varietà di modelli strutturalmente diversi, inclusi alcuni della classe ARIMA di Box-Jenkins. Ai fini applicativi, tuttavia, ci si riconduce solitamente a modelli la cui struttura è costruibile combinando le componenti elementari che l'operatore statistico percepisce in base alla semplice analisi grafica della serie. Ciò è tanto più vero quando lo scopo della rappresentazione è quello della scomposizione della serie nel trend, stagionalità e residuo. Così, nel caso di serie mensile con trend lineare, indicando con μ_t il trend, con β_t il suo incremento stocastico, con s_{it} la componente stagionale relativa al mese i individuato dal parametro t , ($i = 1, 2, \dots, 12$), e con $\delta\mu_t, \delta\beta_t, \delta s_{it}$ i disturbi casuali indipendenti dalle singole componenti, si ha:

$$\begin{aligned} y_t &= \mu_t + s_{it} + v_t \\ \mu_t &= \mu_{t-1} + \beta_{t-1} + \delta\mu_t + \delta\beta_t \\ \beta_t &= \beta_{t-1} + \delta\beta_t \\ s_{1t} &= s_{1t-1} + \delta s_{1t} \\ &\dots \\ s_{12t} &= s_{12t-1} + \delta s_{12t} \end{aligned} \tag{3}$$

Introducendo le seguenti notazioni matriciali:

$$\begin{aligned} F_t &= [1 \ 0 \ \dots \ 1 \ 0] \\ \theta'_t &= [\mu_t \ \beta_t \ s_{1t} \ s_{2t} \ \dots \ s_{12t}] \\ w'_t &= [\delta\mu_t \ \delta\beta_t \ \delta s_{1t} \ s_{2t} \ \dots \ \delta s_{12t}] \\ G &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

si perviene alle equazioni (1) e (2).

Osserviamo che nel modello descritto la matrice F_t ha 1 come primo elemento, un altro 1 nella posizione $i + 2$, e zero altrove: pertanto F_t varia ciclicamente nel tempo.

Questo modello sarà da noi adottato per la scomposizione, in quanto, oltre ad essere facilmente comprensibile, è molto flessibile, e può, con semplici estensioni e adattamenti, includere trend polinomiali e situazioni di interdipendenza tra le componenti (si veda P.J. Harrison *et al.*, 1976).

Le equazioni riportate costituiscono solo l'impalcatura formale con cui si decide a priori d'imbrigliare la serie storica, onde coglierne gli aspetti esteriori più salienti; la vera identificazione è successiva, ed avviene tramite la stima iterativa del vettore parametrico θ_t .

3. La stima del vettore parametrico θ_t

Supponendo note le varianze V_t e W_t , date le condizioni di linearità e di gaussianità del nostro modello, lo stimatore ottimale a minima varianza del vettore θ_t non è altro che la media condizionata di θ_t data la successione di osservazioni $y^s = (y_1, y_2, \dots, y_s)$ disponibili al tempo t : $E(\theta_t | y^s)$. A seconda che sia $t = s$, $t < s$ oppure $t > s$, il problema viene denominato rispettivamente di filtraggio, di spianamento, di previsione. Ora, poiché lo spianamento può sempre essere espresso come combinazione ottimale di filtraggi, in questo paragrafo ci occuperemo della stima di θ_t come operazione di filtraggio.

Se escludiamo il caso in cui V_t e W_t sono note, la stima iterativa di θ_t genera problemi di cui, in generale, è difficile fornire una soluzione esatta ed ottimale. Nel seguito, concentreremo la nostra attenzione su due metodi che, pur presentando aspetti criticabili, hanno almeno il pregio della facilità di comprensione e di utilizzo. Uno, di tipo bayesiano, si basa sul concetto di multiprocesso di Harrison-Stevens (1976), l'altro, di tipo prevalentemente adattivo, è noto come filtro di Sage-Husa (1969). Entrambi ipotizzano che le varianze V_t e W_t non siano dipendenti dal tempo, pur essendo in grado di assorbire variazioni limitate. Infine, poiché entrambi i filtri utilizzano le relazioni di Kalman, inizieremo con il presentare queste ultime.

A) La stima con il filtro di Kalman.

Il filtro di Kalman fornisce una soluzione ottimale nel caso in cui le varianze V_t e W_t sono note.

Supponiamo che al tempo $t - 1$ la distribuzione di θ_{t-1} , dopo aver osservato la successione $y^{t-1} = (y_1, y_2, \dots, y_{t-1})$, sia normale p -variata con il vettore media m_{t-1} e matrice di dispersione C_{t-1} :

$$(\theta_{t-1} | y^{t-1}) \sim N_p(m_{t-1}, C_{t-1}).$$

Si può allora dimostrare che la distribuzione di θ_t , dopo aver osservato anche y_t , è ancora normale, con media m_t e varianza C_t che possono essere calcolate ricorsivamente tramite l'algoritmo di Kalman.

Conviene esprimere l'algoritmo nelle due fasi di estrapolazione e di aggiornamento: con la prima, si proiettano le stime in avanti usando le informazioni fino al tempo $t - 1$

$$m_{t|t-1} = Gm_{t-1} \quad (4)$$

$$C_{t|t-1} = GC_{t-1}G' + W_{t-1}, \quad (5)$$

con la seconda, si correggono le stime estrapolate in relazione alle nuove informazioni portate da y_t

$$m_t = m_{t|t-1} - K_t \tilde{y}_t \quad (6)$$

$$C_t = C_{t|t-1} - K_t F_t C_{t|t-1} \quad (7)$$

ove $\tilde{y}_t = F_t m_{t|t-1} - y_t$ è l'innovazione e $K_t = C_{t|t-1} F_t (F_t C_{t|t-1} F_t' + V_t)^{-1}$ è il "guadagno di Kalman", cioè un vettore di ponderazione che determina il peso con cui le informazioni nuove contenute in y_t devono modificare la distribuzione di θ_t .

La stima m_t di θ_t , così ottenuta, è lineare ed ottimale nel senso dei minimi quadrati.

In un contesto bayesiano, l'algoritmo di Kalman appare come un procedimento iterativo con il quale si passa dalla distribuzione gaussiana iniziale al tempo $t - 1$ a quella finale al tempo t , dopo aver osservato y_t .

B) *La stima bayesiana tramite multiprocesso.*

Il concetto base sta nell'ammettere che la serie, per ogni istante t , possa essere rappresentata da N configurazioni diverse G^j , ($j = 1, 2, \dots, N$) del DLMG, soggette ad evoluzione markoviana (una configurazione è individuata da una coppia di varianze (V^j, W^j) e da una probabilità iniziale π_j).

Disponendo al tempo $t - 1$ delle N distribuzioni iniziali di θ_{t-1} corrispondenti alle N configurazioni

$$(\theta_{t-1} | G_{t-1}^i, y^{t-1}) \sim N_p(m_{t-1}^i, C_{t-1}^i)$$

e delle associate probabilità P_{t-1}^i , tramite il teorema di Bayes si possono generare sia le N^2 distribuzioni di probabilità a posteriori per θ_t , sia le probabilità P_t^{ij} delle transizioni da G_{t-1}^i a G_t^j :

$$(\theta_t | G_{t-1}^i, G_t^j, y^t) \sim N_p(m_t^{ij}, C_t^{ij}).$$

Naturalmente i parametri m_t^{ij} e C_t^{ij} sono calcolabili tramite le relazioni di Kalman.

La probabilità della configurazione G_t^j al tempo t sarà:

$$P_t^j = \sum_i P_t^{ij}.$$

Usando queste, con una prima sintesi, si generano le N distribuzioni di θ_t :

$$(\theta_t | G_t^j, y^t) \sim N_p(m_t^j, C_t^j),$$

e, successivamente la distribuzione finale:

$$(\theta_t | y^t) \sim N_p(m_t, C_t).$$

Il parametro m_t può essere assunto come stima "filtrata" dello stato incognito θ_t .

Questo sistema di filtraggio, fornisce eccellenti risultati, ma si presta ad alcune critiche che riguardano sia il modo estremamente semplificato di definire le distribuzioni a priori, sia il fatto che si finisce per assumere normalmente distribuite misture di normali p -variate. D'altra parte, approcci teoricamente rigorosi, come è dimostrato in L.D. Broemeling (1985), portano alla distribuzione poly- t che, come noto, è praticamente intrattabile.

C) *La stima adattativa con il filtro di Sage-Husa.*

Il filtro di Sage-Husa si ottiene completando le relazioni del filtro di Kalman con due nuove equazioni di stima iterativa a massima verosimiglianza delle varianze incognite V_t e W_t :

$$\begin{aligned} \hat{V}_{t|t-1} &= (t - 2/t - 1)\hat{V}_{t-1|t-2} + (1/t - 1)(\tilde{y}_{t-1}^2 - F_{t-1}C_{t-1|t-2}F_{t-1}') (8) \\ \hat{W}_t &= (t - 1/t)\hat{W}_{t-1} + (1/1)(K_t\tilde{y}_t^2K_t' + C_t - GC_{t-1}G') \quad (9) \end{aligned}$$

Il sistema di filtraggio viene a scomporsi in due sottosistemi interagenti: uno fornisce le stime di V_t e W_t e l'altro sfrutta tali risultati tramite le relazioni di Kalman generando le stime di m_t e C_t .

Il sistema risultante è in generale solo sub-ottimale, in quanto applica empiricamente i due principi di separazione e di equivalenza a certezza, scomponendo il processo di stima congiunta in due fasi ed assumendo come grandezze certe le stime \hat{V}_t e \hat{W}_t da inserire nell'algoritmo di Kalman.

La stima iterativa di V_t e W_t con il filtro in esame conferisce una buona flessibilità al modello, che risulta in grado di affrontare in modo soddisfacente anche molti casi di non stazionarietà nella varianza.

D) *Il problema dei valori iniziali.*

In tutti i sistemi di filtraggio illustrati c'è il problema della determinazione dei valori iniziali del modello.

Nel caso di approccio bayesiano, il problema non è distinto da quello della definizione a priori che lo statistico può e deve stabilire, in base alle informazioni a sua disposizione.

In altro caso, i valori iniziali possono essere dapprima fissati arbitrariamente e, successivamente, adeguati sfruttando i risultati di una iterazione preliminare.

4. La scomposizione come operazione di spianamento

La scomposizione è un'operazione che viene attuata dopo aver rilevato una serie di una data estensione temporale, per cui si presenta tipicamente come un problema di spianamento e cioè come un problema di stima di θ_t essendo dato un insieme $y^T = (y_1, y_2, \dots, y_T)$ di osservazioni con $0 \leq t \leq T$.

Un approccio semplice, nel caso di modelli DLMG, consiste nel definire lo spianamento in termini di due filtraggi: uno "forward" opera in avanti e definisce le stime di θ_t dato (y_1, y_2, \dots, y_t) ; l'altro "backward" opera all'indietro definendo, per ogni t , la stima θ_t dato $(y_T, y_{T-1}, \dots, y_t)$.

Trovandoci in un ambiente lineare e gaussiano, è facile, poi dimostrare che la stima "spianata" m_t^* di θ_t è esprimibile come combinazione lineare delle stime forward e backward.

Indicando con ${}_F m_t$, ${}_F C_t$, ${}_B m_t$, ${}_B C_t$ le medie e le varianze condizionate di tipo "forward" e "backward" rispettivamente, la media e la varianza "spianate" di θ_t risultano (A. Gelb, 1984):

$$m_t^* = C_t^* ({}_F C_t^{-1} {}_F m_t + {}_B C_t^{-1} {}_B m_t) \quad (10)$$

$$C_t^* = ({}_F C_t^{-1} + {}_B C_t^{-1})^{-1} \quad (11)$$

Il calcolo di m_t^* e C_t^* viene, così, ricondotto all'applicazione dei filtri visti in precedenza, mentre le singole componenti spianate μ_t e s_{it} sono ottenibili selezionando gli elementi di m_t^* .

5. Conclusioni

Nel corso della nota abbiamo evidenziato un problema applicativo, la cui rilevanza può essere percepita solo pensando alle decine di serie storiche stagionali che ogni azienda gestisce, ed abbiamo proposto una soluzione di facile realizzazione.

In generale, la scomposizione ottenibile è solo sub-ottimale, tuttavia, la riteniamo senz'altro preferibile ad altre, totalmente empiriche, a motivo della struttura probabilistica introdotta che consente ragionevoli inferenze sui risultati.

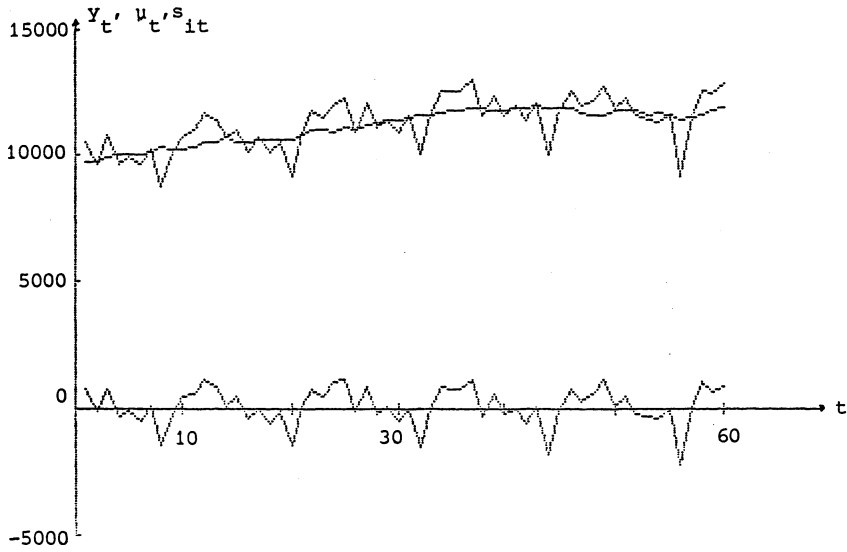


Fig. 1 – Andamento della serie delle produzioni totali di energia elettrica 1971-1975 (fonte Istat) e delle sue componenti trend e stagionalità.

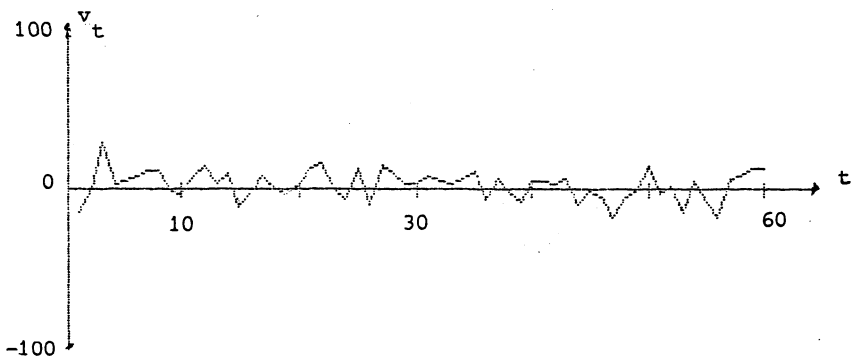


Fig. 2 – Andamento della componente residua v_t

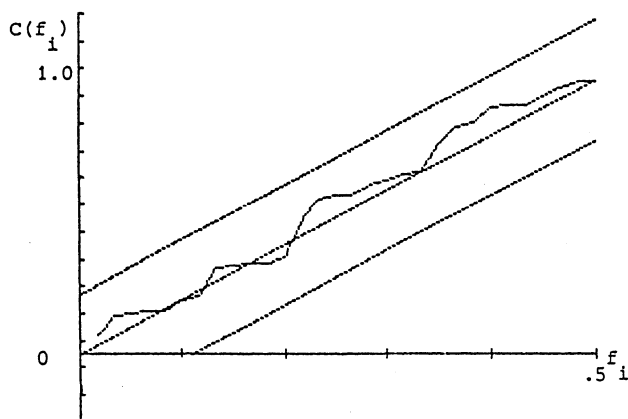


Fig. 3 - Periodogramma normalizzato cumulato del residuo v_t

Le Fig. 1 e 2 illustrano, a titolo esemplificativo, le componenti della serie mensile della "Produzione totale di Energia Elettrica" dal 1971 al 1975, ottenute tramite la tecnica del multiprocesso.

La Fig. 3 mostra, poi, come il periodogramma normalizzato cumulato del residuo v_t risulti ampiamente entro i limiti di accettazione ($\alpha = 10\%$) (si veda Box-Jenkins, 1976) confermando la validità della scomposizione realizzata.

Lavoro svolto nell'ambito della ricerca: "Metodi di decomposizione delle serie storiche e loro applicazioni economiche demografiche ed industriali" finanziata dal CNR (CT 84.00599.10).

Bibliografia

- Box G.E.P., Jenkins G.M., (1976), *Time Series Analysis Forecasting and Control*, S. Francisco, Holden Day.
- Box G.E.P., Hillmer S.C., Tiao G.C., (1978), *Analysis and Modelling of Seasonal Time Series*, U.S. Bureau of Census, E.R.R., p. 309-334.
- Cleveland W., Delvin S., Schapira D., D. Terpenning I., (1981), *The SABL Computer Package*, Bell Lab., New York, Murray Hill.
- Broemeling L.D., (1985), *Bayesian Analysis of Linear Model*, New York, Marcel Dekker.
- Gelb A., (1984), *Applied Optimal Estimation*, London, MIT Press.
- Harrison P.J., Stevens C.F., Bayesian Forecasting, *Journ. Royal Stat. Soc.*, B, 38, 1976, p. 205-267.

- Hillmer S.C., Tiao G.C., An ARIMA-Model-Based Approach to Seasonal Adjustment *JASA*, 77, 1982, p. 63-70.
- Piccolo D., *Linee di ricerca per un progetto statistico della depurazione stagionale*, Centro di Specializzazione e ricerche, Portici RS 1/1982.
- Sage A.P., Husa G.W., Algorithms for sequential adaptive estimation of prior statistics, *Proc. of eighth IEEE Symp. on Adaptive Processes*, 1969.
- Shiskin J., Young A., Musgrave J., *The X-11 Variant of Census Method II Seasonal Adjustment Program*. Tec. Paper n. 15, Bureau of Census U.S. Dep. of Commerce, 1976.
- Vitale C., Baldessari B., *Decomposition of ARIMA models into Correlated ARIMA Components*. Centro di Spec. e Ric., Portici, RS 30/1984.
- Kitagawa G., A nonstationary Time Series Model and its Fitting by a Recursive Filter. *Journ. of Time Series Analysis*, Vol. 2, n. 2, 1981, p. 103-116.

Summary

This paper describes an adaptive approach to the decomposition of a seasonal time series into stochastic components: trend, seasonality and error. That approach will be useful where time series is short or has time varying variance.

The adopted model is a dynamical linear gaussian one (DLMG) and the decomposition is carried out by Kalman filter used as well for updating the state vectors.

Either the multi-process structure or the Sage-Husa algorithm are proposed to make Kalman filter operate in situations with unknown error variances.