Rivista di Statistica Applicata Vol. 21 n. 2 Giugno 1988

Considerazioni su uno stimatore del parametro di locazione per una fdp di Weibull a tre parametri

Mario Cacciari, Istituto di Elettrotecnica Industriale – Università di Bologna

Nel presente lavoro si illustra uno stimatore per il parametro di locazione valido per prove complete o comunque troncate. Nel lavoro vengono inoltre confrontati i risultati delle stime del parametro di locazione ottenuti con questo stimatore e con quelle ricavabili con i principali stimatori di letteratura.

1. Introduzione

Nelle prove di durata di tipo accelerato eseguite su campioni di materiale isolante solido sollecitato con valori superiori a quelli di esercizio per quanto riguarda lo stress elettrico e termico si è osservato in maniera significativa un buon adattamento per i tempi rilevati in corrispondenza al guasto dei provini di ciascun lotto in esame con una funzione di distribuzione di probabilità di Weibull a due o tre parametri

L'appartenenza di tali tempi al guasto, t_i, ad una fdp di Weibull a tre parametri (si veda ad esempio Johnson e Kotz, 1970, pag. 250; 'O Connor, 1981, pag. 69):

$$F(t) = 1 - exp(-((t-\gamma)/\alpha)^{\beta}) \tag{1}$$

oppure ad una a due parametri (se $\gamma = 0$) viene giustificata mediante appositi test analitici o grafici ampiamente studiati in letteratura (Mann *et al.* 1974, pag. 215; Schwob e Peyrache, 1969, pag. 276).

Per la determinazione delle stime dei tre parametri $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma \gtrless 0$ chiamati rispettivamente parametro di scala, di forma e di locazione, di solito, *AA* provvedono a ricavare dapprima il valore di γ procedendo, successivamente, a ricercare la stima di α e β con gli stimatori più adatti a seconda della numerosità del lotto e del livello di censuramento introdotto nella prova.

Lo scopo della presente nota è quello di illustrare l'efficacia di un nuovo stimatore del parametro di locazione altrettanto valido in presenza di risultati da prove completate o troncate su lotti di qualsivoglia numerosità.

È indubbio che la stima di γ proposta nella presente nota è più laboriosa, dal punto di vista del calcolo, rispetto a quella ricavabile con lo stimatore di Chan (Chan *et al.*, 1974) o con quello di Dubey ('O Connor, 1981, pag. 70). Si può tranquillamente osservare che tale impegno è però minore di quello richiesto da altri metodi di letteratura (vedi MLEM di Cohen, 1971), quello di Johnson (Johnson e Kotz, 1970, pag. 260) o quello di Mann e Fertig (Mann *et al.*, 1974, pagg. 252–254) od, in particolare modo, il procedimento di stima di γ basato sui metodi della regressione lineare (mediante la ricerca per successivi tentativi di quel valore di γ che rende ottimale l'allineameto dei punti immagine sul diagramma di Weibull (Schwob e Peyrache, 1969, pag. 276)).

2. Calcolo della stima di γ

Si ricorda che l'equazione (1), dopo ovvi passaggi, assume l'andamento lineare in un piano di coordinate $(lnt,\ ln(-ln(1-F(t)))$:

$$ln(-ln(1-F(t))) = -\beta ln\alpha + \beta ln(t-\gamma) \tag{2}$$

Tale retta viene rappresentata nella cosiddetta carta di Weibull ordinando in senso crescente i tempi al guasto ed attribuendo a ciascuno dei tempi al guasto il valore atteso della probabilità, $E(F(t_i))$, infine riportando le coppie di valori $(t_i - \gamma,\ E(F(t_i)))$ sul diagramma (se $\gamma = 0$ la retta è dovuta a punti immagine appartenenti ad una fdp di Weibull a due parametri).

Si è visto che un metodo semplice ed affidabile per le stime del valore atteso della $F(t)$, valido sia per prove complete che comunque troncate è costituito dalla relazione seguente (tratta di Cacciari e Montanari, 1987);

$$F(t_i) = (I(i) - 0.5)/(N + 0.25) \tag{3}$$

La stima di $I(i)$ si ottiene invece con lo stimatore di Bernard ('O Connor, 1981, pag. 62):

$$I(i) = I(i-1) + (N + 1 - I(i-1))/(N + 2 - C_s(i)) \tag{4}$$

Dove N è la numerosità del lotto, $I(0) = 0$ e $C_s(i)$ è tale da raggruppare i provini troncati e guastatisi fino al tempo t_i incluso. Le stime di $F(t_i)$ così ottenute sono prossime a quelle ricavate con altri stimatori (Petersen, Efron) in presenza di prove troncate in modo progressivo, od a quelle ricavate con lo stimatore di Bloom in presenza di prove complete o troncate singolarmente. In quest'ultimo caso le stime sono del tutto equivalenti a quelle esatte proposte da White allo scopo di determinare i valori dei parametri α e β in una fdp di Weibull a due parametri con i metodi della regressione lineare applicata ai punti immagine delle coppie di valori $(t_i,\ E(F(t)))$ riportati su di un diagramma di Weibull (Cacciari e Montanari, 1984 e 1987).

Per la determinazione della stima del parametro di locazione si fa ricorso nel presente lavoro al seguente stimatore:

$$\gamma = (t_1 - (t_3 + t_2 - 2t_1)A/(1 - 2A)) \tag{5}$$

ove intervengono 4 tempi al guasto opportuni in analogia con altri metodi lineari. Rispettivamente t_1 e t_3 sono uguali al tempo di guasto della prima scarica e dell'ultima avvenute nel lotto, t_2 indica invece il tempo al guasto corrispondente alla scarica prossima ad $I(i) = (r + 3)/4$ (con r si intende rappresentare l'ultimo guasto avvenuto nel lotto sottoposto a censuramento, se la prova è completa $r = N$) e t_4, che interviene nella determinazione del coefficiente A, indica il tempo al guasto di una scarica prossima a $I(i) = r/2$.

Il coefficiente A è infatti legato alle probabilità al guasto dei primi tre tempi prescelti mediante la seguente espressione:

$$A = ((ln(1 - q_3)/ln(1 - q_1))^{\frac{1}{\beta}} \cdot \left[(1 + (ln(1 - q_2)/ln(1 - q_3))^{\frac{1}{\beta}})^{-1}\right] \tag{6}$$

in cui intervengono, come si può vedere dallo sviluppo in appendice, i valori dei relativi rischi cumulati pari a:

$$H_i = -ln(1 - q_i) \tag{7}$$

con $q_i = F(t_i)$ ottenuto mediante l'equazione (3). Nell'equazione (6) compare anche una stima del parametro di forma β per la cui determinazione si ricorre al seguente stimatore:

$$((t_4 + t_2)/2 - t_1)/(t_3 - t_1) = ((H_4^{\frac{1}{\beta}} + H_2^{\frac{1}{\beta}})/2H_1^{\frac{1}{\beta}} - 1)/(H_3/H_1)^{\frac{1}{\beta}} - 1) \tag{8}$$

da risolvere con un procedimento di calcolo iterativo. È indubbio che la stima di γ ottenuta con le equazioni (6) e (8) è leggermente più laboriosa dal punto di vista del calcolo rispetto ai due stimatori lineari di Chan e Dubey, con il vantaggio che in questa procedura non occorre avere a disposizione le tabelle di Chan, né occorre scegliere t_2 sul diagramma di Weibull in corrispondenza perfetta con un rischio cumulato pari a:

$$H_2 = \sqrt{H_3 \cdot H_1} \tag{9}$$

ma è sufficiente che t_2 sia prossimo ad un valore di $I(i) = (r + 3)/4$ così come t_4 lo sia a $I(i) = r/2$. Inoltre si può rilevare facilmente come il tempo di calcolo di questo stimatore sia senz'altro minore di quello occorrente per il metodo di Mann–Fertig o della regressione lineare con ricerca dell'allineamento ottimale dei punti immagine sul diagramma di Weibull (citati in Tab. I).

Infine in Tab. I si mettono a confronto i diversi stimatori riportando i risultati delle stime del parametro di locazione di una fdp di Weibull relativo ad una serie di prove su lotti diversi per numerosità, grado di censuramento (richiamati per comodità in Tab. II).

Dall'esame dei valori riportati appare chiaramente l'utilità dello stimatore proposto, che mediante una relativa semplicità di calcolo permette di ottenere stime di γ prossime a quelle ottenibili con il metodo della regressione lineare con ricerca dell'allineamento ottimale dei punti immagine riportati sul diagramma di Weibull, rendendosi particolarmente vantaggioso, rispetto agli altri metodi citati in Tab. II, nella ricerca della stima del parametro di locazione in lotti di qualsivoglia numerosità e grado di censuramento.

Tab. I – Confronto delle stime del parametro di locazione ottenute con vari metodi di lettura.

campioni / metodi	N=6; r=6 C	N=12 r=12; C	N=15 r=15; C	N=25 r=25; C	N=30 r=30; C	N=5; r=4 CS	N=16 r=9; CS	N=5; r=4 CP
Metodo proposto	γ=1.42	γ=-.014	γ=4.21	γ=10.9	γ=26.8	γ=2.86	γ=14.53	γ=2.64
Dubey	γ=1.56	γ=0.092	γ=3.03	γ=10.2	γ=27.47	γ=2.66	γ=14.2	γ=2.37
MLEM	γ=.89	γ= .06	γ=2.90	γ=9.33	γ=26.55	γ=2.15	γ=11.53	γ=1.58
Chan	γ=1.33	γ=-.068	γ=2.78	γ=9.63	γ=23.6	γ=2.1		γ=2.2
Johnson	γ=.81	γ=0.035	γ=2.58	γ=9.05	γ=26.1	γ=2.16	γ=11.1	γ=1.82
Mann e Fertig	γ=1.65	γ=0.105	γ=5.35	γ=11.6	γ=26.5	γ=2.53	γ=14.2	γ=1.5
Riportati in letteratura	γ=1.0	γ=0.	γ=4.07	γ=9.33	γ=28.11			
Popolazione di origine		γ=0 α=1 β=4			γ=20 α=45 β= 2			
Metodi della regressione lineare valore ottimale	γ=1.38 β=2.22 α=6.40	γ=.098 β=3.30 α=1.009	γ=3.72 β=1.84 α=16.32	γ=10.61 β=1.79 α=16.58	γ=26.1 β=1.89 α=35.41	γ=2.7 β=.622 α=11.82	γ=14.72 β=.94 α=26.7	γ=2.55 β=.76 α=9.17
Bibliografia	Mann *et al.* (1974;pag 215)	Chan *et al.* (1974)	O Connor (1981;pag 70)	Newby (1984)	Donazzi (1985)	Cacciari e Montanari (1987)	Mann *et al.* (1974;pag 348)	Bronw (1982)

Con C vengono indicate le prove complete, con CS quelle troncate singolarmente, con CP quelle troncate in modo progressivo.

Tab. II – Stimatori di letteratura utilizzati in tab. I.

Nome dello stimatore	formula
Dubey	$\gamma = (t_1 \cdot t_3 - t_2^2)/(t_3 + t_1 - 2t_2)$
Johnson	$\gamma = t_1 - \alpha(N + 1)^{-1/\beta}$
MLEM	$\gamma = t_1 - \alpha\Gamma(1 + 1/\beta)/N^{1/\beta}$
Chan	$\gamma = \sum_{1}^{3} a_i \cdot t_i$
Mann e Fertig	Si ricerca il valore di γ che rende il 50% della distribuzione campionaria di $P(\gamma)$ uguale: $P(\gamma) = \sum_{i=k+1}^{r-1} H_i^* / \sum_{i=1}^{r-1} H_i^*$ con $H_i^* = \ln((t_{i+1} - \gamma)/(t_i - \gamma))/(E(H_{i+1}) - E(H_i))$ dove $k = r/3$

Riferimenti Bibliografici

Brown B.W. jr., 1982, Estimation in Survival Analysis: Parametric Models, Product–Limit and Life–Table Methods, *Statistics in Medical Research*, J. Wiley and Sons, New York.

Cacciari M., Montanari G.C., 1985, Un metodo approssimato per calcolare i parametri ed i limiti di tolleranza dei percentili di una fdp di Weibull valido per prove censurate in modo progressivo, *Metron*, **42**, 67–84.

Cacciari M., Montanari G.C., 1987, A Method to Estimate the Weibull Parameters for Progressively Censored Tests, *IEEE Trans. on Reliability*, 36, 87–93.

Chan L.K., Cheng S.W., Mead E.R., 1974, Simultaneous Estimation of Location an Scale Parameters of the Weibull Distribution, *IEEE Trans. on Reliability*, **32**, 335–341.

Cohen A.C., 1971, Multicensored Sampling in Three–Parameter Weibull Distribution, *Technometrics*, **7**, 347–351.

Donazzi F., 1985, Three–Parameter Weibull Distribution. Threshold Value Estimation for Large Sample Size, *Seminario sobre Modelos Estatisticos em Ciências dos Materiais*, Sao Paulo, Brasil, 12–14 Nov. 1985.

Johnson N.L., Kotz S., 1970, *Continuous univariate distribution–1*, Houghton Mifflin Company, Boston.

Mann N.R., Scafer R.E., Singpurwalla N.D., 1974, *Methods for Statistical Analysis of Reliability and Life Data*, J. Wiley and Sons, New York.

Newby M., Properties of Moment Estimators for 3–Parameter Weibull Distribution, *IEEE Trans. on Reliability*, **33**, 192–195.

'O Connor D.T., 1981, *Practical Reliability Engineering*, Heyden, London.

Schwob M., Peyrache G., 1969, *Traité de fiabilité*, Masson et Cie, Paris.

Summary

A practical estimator of the location parameter of the Weibull laws

Some recent literature has been devoted to the discussion estimation of parameter three-parameter Weibull distribution. This paper presents a discovery of an excellent estimator of location parameter and compares over a wide range of cases the results of this current method to other types of estimator that have been proposed for this type of situations.

Appendice

Disposti i punti immagine $((t_i - \gamma),\ F((t_i))$ sulla carta di Weibull, se è verificata l'ipotesi di appartenenza ad una fdp di Weibull a tre parametri, si può scrivere:

$$t_i = \gamma + \alpha[H_i]^{\frac{1}{\beta}} \qquad (A1)$$

(infatti $H_i = -ln(1 - F(t_i)) = \left(\frac{(t_i - \gamma)}{\alpha}\right)^{\beta}$) da cui si trae la seguente espressione del parametro di locazione:

$$\gamma = t_1 - \alpha[H_1]^{\frac{1}{\beta}} \qquad (A2)$$

legata ai valori dei parametri di scala e di forma. Il parametro di scala, α, si può allora ottenere dal seguente simatore:

$$\alpha = (t_3 + t_2 - 2\gamma)/\left([H_3]^{\frac{1}{\beta}} + [H_2]^{\frac{1}{\beta}}\right) \qquad (A3)$$

ricavato applicando l'equazione (A1) per la seconda e terza coppia di punti immagine, scelti secondo quanto indicato nel paragrafo 2, e sommando i rispettivi tempi al guasto. Ciò permette di riscrivere la (A2) nella forma:

$$\gamma = t_1 - \left((t_3 - t_2 - 2\gamma)[H_1]^{\frac{1}{\beta}}\right)/\left([H_3]^{\frac{1}{\beta}} + [H_2]^{\frac{1}{\beta}}\right) \qquad (A4)$$

che dopo alcuni facili passaggi si trasforma nell'equazione (5) del lavoro. Il parametro di locazione può essere calcolato oltre che da tale stimatore che qui riscriviamo:

$$\gamma = t_1 - (t_3 + t_2 - 2t_1) \cdot A/(1 - 2A) \qquad (A5)$$

da uno equivalente pari a:

$$\gamma = t_1 - (t_3 - t_1)/B \qquad (A6)$$

con $B = \left[(H_3/H_1)^{\frac{1}{\beta}} - 1\right]$; stimatore quest'ultimo ricavato applicando le regole di proporzionalità al rapporto fra $(t_3 - t_1)$ e t_1 espressi secondo la relazione (A1).

Entrambi gli stimatori di γ sono legati alla stima del parametro di forma. Per ottenere una stima di quest'ultimo parametro si può ricorrere alle seguenti identità:

$$(t_4 + t_2)/2 - t_1 = \alpha \left[(H_4^{\frac{1}{\beta}} + H_2^{\frac{1}{\beta}})/2 - H_1^{\frac{1}{\beta}} \right] \tag{A7}$$

$$t_3 - t_1 = (H_3^{\frac{1}{\beta}} - H_1^{\frac{1}{\beta}})\alpha$$

il cui rapporto non è altro che l'equazione (8) utilizzata nella nota.